《高级微观经济学》课程教学讲义

# 第一章　技 术



## 第一节　投入与产出的度量

1、生产集：技术上可行的（包括技术有效和无效）净产出束的集合。

$$Y=\{(y,-x)inR^{n+1};满足技术上可行\}$$

2、投入要求集：至少能生产 y 单位产出的投入束的集合。

$$V(y)=\{xinR_{+}^{n};满足(y,-x)inY\}$$

3、等产量曲线：刚好能生产出 y 单位产出的投入束的集合。

$$Q(y)=\{x\,in\,R_{+}^{n};满足xinV(y),but\,not\,inV(y'),y'>y\}$$

4、生产函数：最大产出与投入之间的对应关系。

$$f(x)=\{yinR;满足y是Y中与-x相联的最大产出\}$$

5、转换函数：生产函数的转换形式。

$$T(y,x)=0\quad y往往为向量，x往往为标量，如T(y_1,y_2,x)=0$$

若假定 x 不变，则产量在两种产品之间转换，可得生产可能性边界和边际转换率。

$$MTS_{12}\equiv-\frac{dy_2}{dy_1}=\frac{\partial T/\partial Y_1}{\partial T/\partial Y_2}$$

例子：CD 技术下投入与产出的度量

$$Y=\{(y,-x_1,-x_2)\in R^3;y\le x_1^a x_2^b\}$$

$$V(y)=\{(x_1,x_2)\in R_{+}^{2};y\le x_1^a x_2^b\}\ldots\ldots$$

## 第二节　技术假定：单调技术、凸技术与正则技术

一、单调性假定：边际产量大于或等于 0。

若 *x* 在 *V(y)*中，*x'*>*x*，则 *x'*必在 *V(y)*中。或者若净产出向量 $y$ 在 $Y$ 中，且 $y'\le y$，那么 $y'$ 必在 $Y$ 中。

二、凸性假定：若两个投入束都至少可以生产 $y$ 单位产出，则其加权平均也至少可以生产 $y$ 单位产出。

$V(y)$ 的凸性定义：若 $x$ 与 $x'$ 都在 $V(y)$ 中，则其凸组合 $tx+(1-t)x',(0\le t\le 1)$ 也在 $V(y)$ 中。

注：投入要求集是凸集等价于生产函数是拟凹的。

$Y$ 的凸性定义：若 $y$ 与 $y'$ 都在 $Y$ 中，则其凸组合 $ty+(1-t)y',(0\le t\le 1)$ 也在 $Y$ 中。

注：生产集是凸的意味着投入要求集是凸的，但逆命题不成立。

三、正则性假定：任何产量都可以生产出来。

$V(y)$ 集是非空的闭集。

## 第三节　技术替代率与替代弹性

一、技术替代率：…

$$RTS_{12}=-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}$$

二、替代弹性：

$$\sigma\equiv\frac{\text{要素投入比例变动百分比}}{\text{技术替代率变动百分比}}=\frac{d\ln(x_2/x_1)}{d\ln(RTS_{12})}$$

注：替代弹性反映等产量曲线的曲率，$\sigma$ 愈小，曲线愈弯曲。特殊地，$\sigma$ 为 0 时曲线为折线；$\sigma$ 为 $\infty$ 时，曲线为直线。

例子：CD 技术具有单位替代弹性

$$RTS_{12}=ax_2/bx_1,\quad \ln RTS_{12}=\ln a/b+\ln x_2/x_1$$

$$\sigma=\frac{d\ln x_2/x_1}{d\ln RTS_{12}}=1$$

例子：CES 技术的替代弹性

$$RTS_{12}=(a/b)(x_2/x_1,)^{(1-\rho)}\quad \ln RTS_{12}=\ln a/b+(1-\rho)\ln(x_2/x_1)$$

$$\sigma=\frac{d\ln x_2/x_1}{d\ln RTS_{12}}=\frac{1}{1-\rho}$$

## 第四节　产出弹性与规模弹性

一　产出弹性：

某要素的产出弹性=产出变动百分比/该要素投入量变动百分比

$$e_i=\frac{\partial f/\partial x_i}{x_i/f}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}$$

二　规模弹性

= 产出变动百分比/规模变动百分比

$$e=\frac{df}{dt}\frac{t}{f}$$

其中，$\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx_1}{x_1}=\ldots=\dfrac{dx_n}{x_n}$

三　关系

$$e=\sum e_i$$

证明：$dy=\sum\dfrac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$

$$\frac{dy}{y}=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}\frac{dx_i}{x_i}=\frac{dt}{t}\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}=\frac{dt}{t}\sum e_i$$

例子：CD 技术的产出弹性与规模弹性。

附：规模报酬不变的 3 种等价描述

1、 生产函数 $f(x)$是 1 次齐次的，即 $f(tx)=tf(x)$，对所有的 $t\geq 0$ 。

2、 对所有 $t\geq 0$，$y$ 在 $Y$ 中意味着 $ty$ 在 $Y$ 中；或者$(y,-x)$在 $Y$ 中意味着 $t(y.-x)$在 $Y$ 中。（这意味着各种净产出同时加倍。如果不是这样，生产函数就不是一次齐次的）

3、 对所有 $t\geq 0$，$x$ 在 $V(y)$中意味着 $tx$ 在 $V(ty)$中。（这意味着投入加倍时产出也加倍。如果不是这样，生产函数就不是一次齐次的）

描述 2 的直观解释：

图 1a 为规模报酬不变，满足 2；图 1b 为规模报酬递增，在 t<1 时不满足 2；图 1c 为规模报酬递减，在 t>1 时不满足 2。

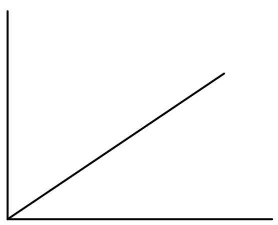


图 1a

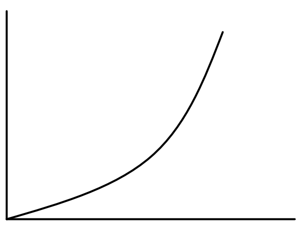


图 1b

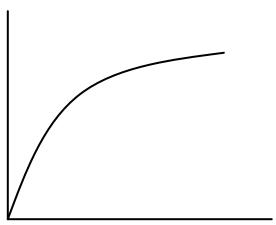


图 1c

## 第五节　常见技术

一、线性技术

二、里昂惕夫技术

三、位似技术

1、齐次函数

齐次函数：如果一个函数满足 $f(tx)=t^k f(x), t>0$ 则称 $f(x)$ 为 k 次齐次函数。

2、 单调变换

若函数 $g(.)$ 是严格递增函数，则称 $g(f(x))$ 是 $f(x)$ 单调变换。

3、位似函数

位似函数：一次齐次函数的单调变换所形成的函数叫位似函数。

位似技术：如果生产函数是位似函数，则称该生产技术为位似技术。

4、位似技术的特征

1、 等产量线象吹起来的样子。

2、 等斜线或扩张线是过原点的直线。

证明：考虑点$tx$处的边际产量,对定义式 $f(tx)=t^k f(x)$ 两端微分：

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial(tx_i)}t=t^k\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \text{ 或记为 } MP_i(tx)=t^{k-1}MP_i(x)$$

这说明边际产量函数是 k-1 次的。一般地。一个 k 次（$k\geq 1$）齐次函数的一阶偏导数是 k-1 次齐次函数。由于生产函数一次齐次，边际产量函数为 0 次齐次，这说明点 x 沿着过原点的直线移动到点 tx 时边际产量不变 $MP(tx)=MP(x)$，进而等产量曲线的斜率不变，因为等产量曲线的斜率等于边际产量之比。

例子：证明 CES 生产函数 $y=(ax_1^\rho+bx_2^\rho)^{1/\rho}$,其中 $a+b=1, -\infty\leq\rho\leq 1$

1、为一次齐次函数；2、具有不变的替代弹性 $\sigma=1/(1-\rho)$；3、$\rho$ 取不同值时表示不同的技术：$\rho$ =1 时为线性技术，$\rho$ =0 时为 CD 技术，$\rho$ 等于负无穷时为里昂惕夫技术。

- 证$\rho$ =0 时为 CD 技术

$$\ln y=\frac{1}{\rho}\ln()$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln y=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(.)}(ax_1^\rho\ln x_1+bx_2^\rho\ln x_2)$$
$$=a\ln x_1+b\ln x_2$$

- 证 $\rho$ 等于负无穷时为里昂惕夫技术

如果 $x_1<x_2$,则 $y=x_1(a+b(x_2/x_1)^\rho)^{1/\rho}$,显然 $\rho\to-\infty$ 时 $y=x_1$.类似地，当 $x_2<x_1$ 时 $y=x_2$,

所以 $y=\min[x_1,x_2]$

# 第二章　利润最大化



## 第一节　利润最大化

**利润最大化原则**：任何一种活动的边际收益等于边际成本

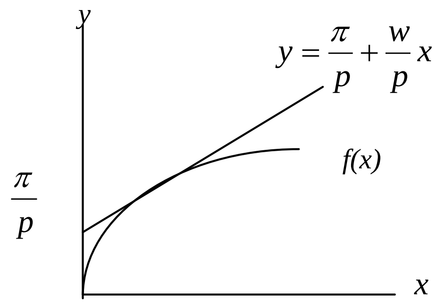
**一阶条件**

$$\pi(p,w)=\max_x\ py-wx$$
$$s.t.\quad y=f(x)$$

或者，

$$\pi(p,w)=\max_x\ pf(x)-wx$$

$$p\frac{\partial f(x^\bullet)}{\partial x_i}=w_i$$




图象解释

解函数与值函数

在多投入情况下，

$$pDf(x^\bullet)=w$$

**二阶条件**

1、一种投入的情况

$$f''(x^\bullet)\le 0$$

2、多种投入的情况

生产函数的海塞矩阵负半定。

海塞矩阵 $H$ 是生产函数的二阶导矩阵 $D^2f(x^\bullet)=\left(f_{ij}\right)$。

负半定是指矩阵的顺序主子式符号交叉 $f_{11}\le 0$……；或 $hHh^T\le 0$。

一般情况下，无约束最大化问题的二阶条件为，目标函数的海塞矩阵负半定或目标函数是凹函数；最小化问题的二阶条件为，目标函数的海塞矩阵正半定或目标函数是凸函数。

## 第二节　困难

- 生产函数不可微，
- 内解不存在，
- 无解。

## 第三节　要素需求与产品供给函数的特性—0 次齐次性

$$x(tp,tw)=x(p,w)$$
$$y(tp,tw)=y(p,w)$$

可用一阶条件证明

## 第四节　使用一阶条件的比较静态（连续型）

**一、一种投入的情况**

一阶恒等式：$pf'(x(p,w))=w$

## 二、两种投入的情况（设 p=1）

$f_1 = w_1$，$f_2 = w_2$

对 $w_1$ 微分 $$\begin{cases} f_{11}\dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} + f_{12}\dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} = 1 \\ f_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} + f_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} = 0 \end{cases}$$

对 $w_2$ 微分 $$\begin{cases} f_{11}\dfrac{\partial x_1}{\partial w_2} + f_{12}\dfrac{\partial x_2}{\partial w_2} = 0 \\ f_{21}\dfrac{\partial x_1}{\partial w_2} + f_{22}\dfrac{\partial x_2}{\partial w_2} = 1 \end{cases}$$

写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

## 三、多种投入的情况

一阶条件恒等式：$Df(x(w)) \equiv w$

对 w 微分：$D^2 f(x^{\bullet}) \bullet Dx(w) = I$

所以：$Dx(w) = H^{-1}$，替代矩阵 $Dx(w)$ 对称负半定。

## 四、比较静态结果（要素需求函数性质）

自价格效应为负，交叉价格对称。因为海塞矩阵对称负半定，其逆也对称负半定，替代矩阵对称负半定。负半定则主对角线上的元素为负，自价格效应为负；对称则交叉价格效应对称。

# 第五节 使用代数的比较静态（离散型）

## 一、利润最大化弱公理 WAPM

在价格 $p'$ 下，若利润最大化厂商选择了净产出 $y'$，则必有 $p'y' \geq p'y$，y 是技术上可行的其它净产出向量。

**二、弱公理图示**

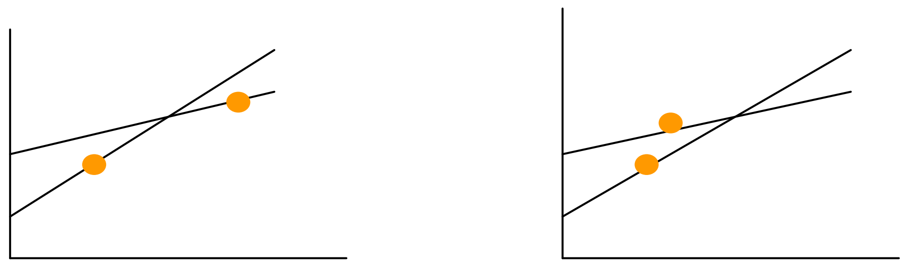


图 10 左图满足弱公理，右图违背弱公理

定义等利润线

$\pi = py - wx$

$y = \frac{\pi}{p} - \frac{w}{p}x$

等利润线为直线，截距为真实利润，斜率为真实要素价格或相对价格。等利润线越高利润越高。

**三、比较静态结果**

$\Delta p \Delta y \geq 0$。对于产出，自价格效应为正；对于投入，自价格效应为负。

## 第六节　寻回性

**一、概念**

根据经验数据（价格与净产出束样本数据）构造原技术。利润最大化问题的逆向操作。

利润最大化：已知生产集，寻找最佳净产出束。

寻回性：已知最佳净产出束，寻找生产集。

**二、据单调性与凸性构造内界。**

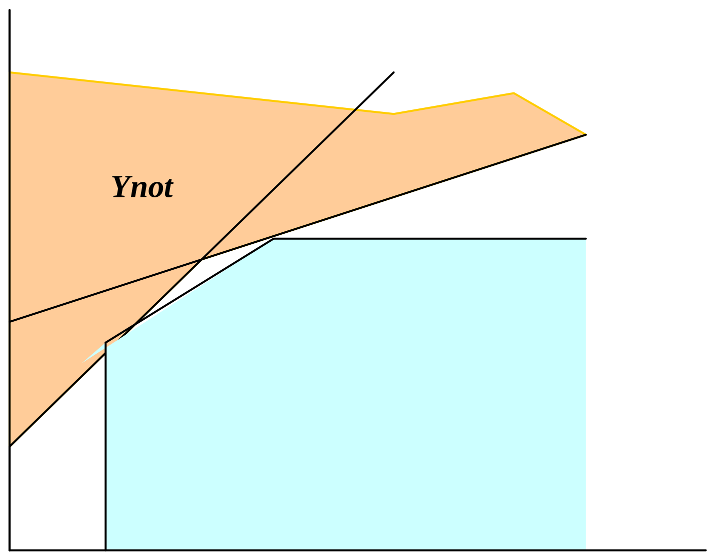
最小集 YI：YI=（y∈Y:；含观测点的凸的单调壳，单调凸集）由观测点构造的满足凸性与单调性的集合。

**三、据弱公理构造外界。**

不可能集 Ynot：$Ynot = (y; p'y > p'y')$ 不满足弱公理的净产出束的集合。最大集 YO：

$YO = (y; p'y \leq p'y')$ 满足弱公理的净产出束的集合，不可能集的补集。

$YO \supset Y \supset YI$


Ynot

# 第三章　利润函数



## 第一节　利润函数的特性

**一　单调性**

利润函数是产出价格的增函数，投入价格的减函数。

令 $p=(p_1,\cdots,p_i,\cdots p_n), p'=(p_1,\cdots,p_i',\cdots p_n)$，且 $\pi(p)=py,\pi(p')=p'y'$。约定 $if\ \ y_i>0, p_i'>p_i; if\ \ y_i<0, p_i'<p_i$。所以无论物品 i 是产出还是投入下列不等式链成立：

$$\pi(p')=p'y'\geq p'y>py=\pi(p)$$

第一个不等号来自公理，第二个不等号来自约定。

**二　齐次性**

利润函数是 $p$ 的一次齐次函数。

第一步，利用弱公理证明净供给函数是 0 次齐次的。设 $y$ 是 $p$ 下的最优选择，要证 $y$ 也是 $tp$ 下的最优选择。因为 $y$ 是 $p$ 下的最优选择，所以有：

$py\geq py'$, 对于 $t$>0 有 $tpy\geq tpy'$。这说明 $y$ 是 $tp$ 下的最优选择。

第二步，证明原命题。$\pi(tp)=(tp)y=t(py)=t\pi(p)$

**三　凹凸性**

利润函数是 $p$ 的凸函数，即点的凸组合的函数值小于函数值的凸组合 $\pi(Ep)\leq E\pi(p)$，其中 $Ep$ 为价格的凸组合，$E\pi$ 为函数值的凸组合。证明如下：

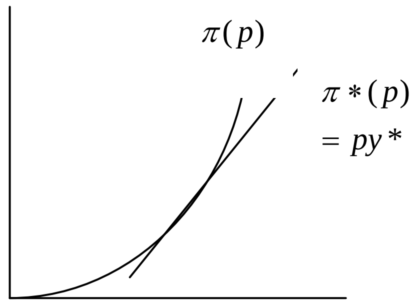
$$令\begin{cases}\pi(p)=py\\ \pi(p')=p'y'\\ \pi(p'')=p''y''\end{cases}$$

其中，$y''$ 是 $p'$ 和 $p$ 的凸组合，即 $p''=tp+(1-t)p',[0\leq t\leq 1]$。所以：

$$\begin{aligned}\pi(p'')&=p''y''\\ &=tpy''+(1-t)p'y''\\ &\leq tpy+(1-t)p'y'\\ &=t\pi(p)+(1-t)\pi(p')\end{aligned}$$

不等号来自公理。上式说明两点加权平均的函数值小于两点函数值的加权平均，所以利润函数是凸的。

凸函数图示




隋性利润函数： $\pi*(p) = py* - w*x*$是把净产出固定情况下的利润函数。

利润函数： $\pi(p) = py - w*x$是净产出随 p 变动而调整时的利润函数。

利润函数位于隋性利润函数的上方，因随价格变动调整产出总比不调整好。利润函数是隋性利润函数的上包络。$\pi(p) \geq \pi*(p)$，当且仅当 $p = p*$时二者相等。

**例子：价格稳定效应。**

设未来价格是随机的，以概率 *t* 取 *p*，以概率 *1-t* 取 $p'$。

若按预期价格 $Ep = tp + (1-t)p'$把净产出稳定下来，为 $y*$，则预期（值）利润为$\pi(Ep) = \pi(tp + (1-t)p') = (Ep)y* = tpy* + (1-t)p'y*$，（此时，企业的利润函数即为惰性利润函数，$\pi*(p) = py* - w*x*$。 $y*$也相当于 $y''$）

若到时根据实际调整净产出，未来以概率 *t* 取 *p*，以概率 *1-t* 取 $p'$，则预期利润为 $E\pi(p) = t\pi(p) + (1-t)\pi(p') = tpy + (1-t)tp'y'$。因为利润函数是凸的，所以前者小于后者。

**四　连续性**

利润函数是 p 的连续函数。

极值定理：如果目标函数的值域是非空紧集，约束集是非空紧集，则值函数是连续的。py 的值域是非空紧集，生产集 Y 是非空紧集，所以利润函数是连续的。

**五　导数特性**

$$y_i(p) = \frac{\partial \pi(p)}{\partial p_i}$$

## 第二节　霍特林引理

**一　引理**

某物品的净供给函数等于利润函数对该物品价格的偏导数。

$$y_i(p) = \frac{\partial \pi(p)}{\partial p_i}$$

二　**证明**

设 $\pi(p^*)=p^*y^*, g(p)=\pi(p)-py^*\geq 0$,显然，g 在 p*处取最小值。

令 $\dfrac{\partial g(p^*)}{\partial p_i}=\dfrac{\partial \pi(p^*)}{\partial p_i}-y_i^*=0\ldots\ldots$

三　**图象说明**

利润曲线与隋性利润曲线

在切点上斜率相等

四　**直接效应与间接效应**

引理描述的是直接效应，间接效应为 0。

1、产出价格上升。设 yi*=100 为均衡产出，产出价格上涨 1 元，据引理，利润增加 100 元。这是因为直接效应为 100 元。在要素价格和各物品净产出不变的条件下，产出价格上涨 1 元，收益就增加 100 元。间接效应是，产出价格上升后企业会增加生产，但增加生产的边际利润为 0。

2、要素价格上升。设一种产出，一种投入，且产出价格标准化为 1。

$$f'(x^*)-w=0$$

$$x^*=x(w)$$

$$\pi(w)=f(x(w))-wx(w)$$

$$\begin{aligned}\pi'(w)&=f'(x^*)x'(w)-x(w)-wx'(w)\\&=-x'(w)+\{f'(x^*)-w\}x'(w)\\&=-x'(w)+0\end{aligned}$$

## 第三节　包络定理

一　**定理**

值函数对某参数的偏导数等于目标函数在最优点处对该参数的偏导数。

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_i}=\frac{\partial f(x,a)}{\partial a_i}\bigg|x=x(a)$$

证明：

$$M(a)=\max_x f(x,a)$$

$$\frac{\partial f(x^*,a)}{\partial x_j}=0$$

$$x^*=x(a)$$

$$M(a)\equiv f(x(a),a)$$

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_i}=\sum_j\frac{\partial f(x^*,a)}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial a_i}+\frac{\partial f(x,a)}{\partial a_i}\bigg|x=x(a)$$

二　**推导霍特林引理**

$\pi(p)=\max_y py$，$\pi(p)$ 为值函数， $py$ 为目标函数，在最优点 $y=y(p)$

## 第四节　使用利润函数的比较静态

利润函数的导数特性把两个函数联系起来，由此可由利润函数的特性推导出净供给函数的特性。

**一　利润函数的单调性和净供给函数的符号约定**

如果 Pi 是产出价格，由利润函数是产出价格的单调增函数导出净产出大于零。如果 Pi 是投入价格，由利润函数是投入价格的单调减函数导出净产出大于零

**二、利润函数的一次齐次性和净供给函数的 0 次齐次性。**

由引理和齐次性定理直接证明。

**三、利润函数的凸性和净供给函数的自价格效应。**

利润函数是凸函数→海塞阵正半定→对角线元素为正→净供给函数的自价格效应为正。

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_1\partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_2\partial p_1} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial p_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

**四、利润函数的连续性和净供给函数交叉价格效应。**

利润函数是连续函数→交叉偏导数对称→净供给函数交叉价格效应对称。

**例子：　李・查特里原理**

原理：长期供给弹性大于短期供给弹性。

证明：

导出长期与短期函数

长期函数

$\pi(p,w,r) = \max\ pf(k,l) - rk - wl$

$k(p,w,r)$

$l(p,w,r)$

$y(p,w,r) = f(k(p,w,r), l(p,w,r))$

短期函数

$\pi(p,w,r，k^*) = \max\ pf(k^*,l) - rk^* - wl$

$k(p,w,r,k^*)$

$l(p,w,r,k^*)$

$y(p,w,r,k^*) = f(k(p,w,r,k^*), l(p,w,r,k^*))$

若固定要素价格，则以上函数简化为

长期利润函数：$\pi(p)$

长期供给函数：$y(p)$

短期利润函数：$\pi(p,k^*)$

短期供给函数：$y(p,k^*)$

令 k*是价格为 p*时的最佳规模，且

$g(p) = \pi(p) - \pi(p,k^*)$,该函数在(p*)处有最小值 0

一阶条件为 $g'(p^*)=\pi'(p^*)-\dfrac{\partial\pi(p^*,k^*)}{\partial p}=0$ 即

$$y_L(p^*)=y_S(p^*，k^*)$$

上式说明在 p*处短期供给量等于长期供给量，或两条曲线在点(p*,y*)处相交。

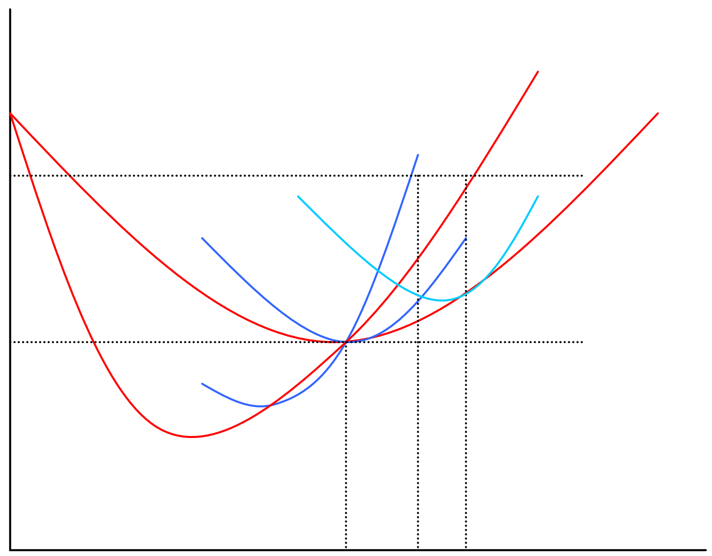
又由于 $g(p)=\pi(p)-\pi(p,k^*)$ 有最小值，所以二阶条件为：

$$g''(p^*)=\pi''(p^*)-\frac{\partial^2\pi(p^*,k^*)}{\partial p^2}>0$$ 即：

$$\frac{dy_L(p^*)}{dp}>\frac{\partial y_S(p^*,k^*)}{\partial p}$$ 或

$$\frac{dy_L(p^*)}{dp}\frac{p^*}{y^*}>\frac{\partial y_S(p^*,k^*)}{\partial p}\frac{p^*}{y^*}$$

即（长短期供给线交点处）长期供给弹性大于短期供给弹性。



# 第四章　成本最小化



## 第一节　微分分析

**一阶条件**

$c(w,y)=\max_x wx \qquad s.t.\ f(x)=y$ 　（$w,y$ 为给定的参数）

$$L(x,w,y,\lambda)=wx+\lambda(y-f(x))$$

$$\begin{cases} w_i-\lambda\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}=0 \\ f(x^*)=y \end{cases}$$

$x_i^*=x_i(w,y)$，此解函数即为条件要素需求函数。

$c^*=c(w,y)=wx(w,y)$，此值函数即为成本函数。

一阶条件变形：$\dfrac{w_i}{w_j}=\dfrac{f_i}{f_j}$，即经济替代率等于技术替代率。经济替代率是等成本线斜率，技术替代率为等产量线斜率（差一个负号）。

**二阶条件**

拉格朗日函数的海塞阵的主子式均为负。海塞阵为：

$$D^2L=\begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} \\ L_{1\lambda} & L_{11} & L_{12} \\ L_{2\lambda} & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} \end{bmatrix}$$

## 第二节　二阶条件综合

- 无约束最大化：目标函数的海塞阵负定。
- 无约束最小化：目标函数的海塞阵正定。
- 约束最大化：拉氏函数的海塞阵负定。
- 约束最小化：拉氏函数海塞阵的主子式均为负。

## 第三节　困难与库恩－塔克条件

**一、困难**

不可微、内解不存在、解不存在、解不唯一。

**二、库恩－塔克条件**

**1、问题**

$$\max f(x) \text{或} \min f(x)$$

$$s.t. g(x) \geq 0 \text{或} g(x) \leq 0$$

**2、符号约定**

$$L(x,\mu) = f(x) \pm \mu g(x)$$

- 大大为正（最大化问题，大于号不等式约束）
- 小小为正
- 大小为负
- 小大为负

符号约定可保证库恩－塔克乘子为非负。

**3、库恩－塔克条件**（一阶条件与互补性松驰条件）

$$\partial L / \partial x_i = 0$$
$$\mu_i \geq 0 \quad if \ \ g_i(x) = 0$$
$$\mu_i = 0 \quad if \ \ g_i(x) > 0 \ \ or \ \ g_i(x) < 0$$

后两个条件也叫互补性松驰条件。

**4、应用举例**

**例子Ⅰ：利润最大化（教材 P31）**

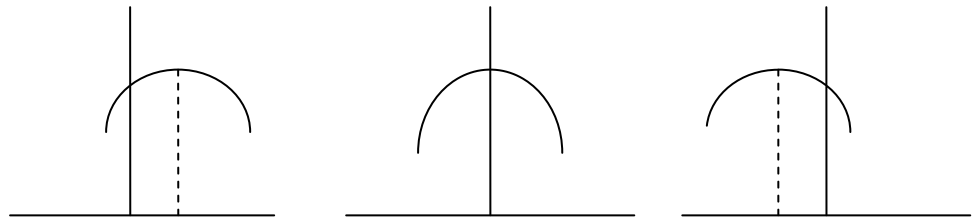
$$\max pf(x) - wx$$
$$s.t. \ x \geq 0$$
$$L(x,\mu) = pf(x) - wx + \mu x$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = p\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - w_i + \mu_i = 0$$

若内解存在，则有 $x_i^* > 0,\ \mu_i = 0$。这时一阶条件为：

$$p\frac{\partial f(x^*)}{\partial xi} - w_i = 0,\ if \ \ x_i^* > 0$$

若内解不存在，则有 $x_i^* = 0,\ \mu_i \geq 0$。这时一阶条件为：

$$p\frac{\partial f(x^*)}{\partial xi} - w_i \leq 0,\ if \ \ x_i^* = 0$$



**例子Ⅱ：成本最小化（教材 P57）**

$$\max wx \qquad s.t.\ f(x)=y, x\ge 0$$

$$L(x,\lambda,\mu)=wx+\lambda(y-f(x))-\mu x$$

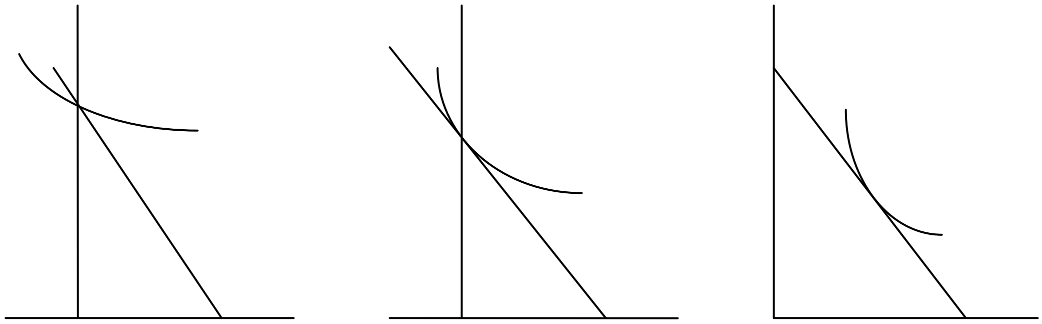
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=w_i-\lambda\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}-\mu_i=0\text{或}$$

$$w_i-\lambda\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}=\mu_i\begin{cases}=0 & if\quad x_i^*>0\\ \ge 0 & if\quad x_i^*=0\end{cases}$$

考虑两种要素，第一种无内解，第二种有内解。

$$RTS_{12}=\frac{w_1-\mu_1}{w_2-\mu_2}=\frac{w_1-\mu_1}{w_2}\le\frac{w_1}{w_2}$$

即在均衡点处，等产量线较平，等成本线较陡，或者两线斜率相等，均衡点必在纵轴上。若两种要素都有内解，则均衡点处两线相切。



## 第四节　条件要素需求函数

### 一、函数概念

条件要素需求函数 $x(w,y)$ 是要素价格与产出的函数，是成本最小化问题的解函数。它与要素需求函数不同。要素需求函数 $x(p,w)$ 是要素价格与产出价格的函数，是利润最大化问题的解函数。

### 二、函数性质

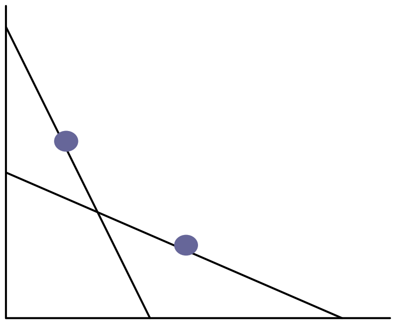
这里讲讨论的函数性是对参数 W 而言的，不是对参数 Y。条件要素需求函数的性质与要素需求函数性质类似：自价格效应为负，交叉价格效应对称。证明过程利用一阶恒等式对 $w_1$ 微分，再对 $w_2$ 微分。

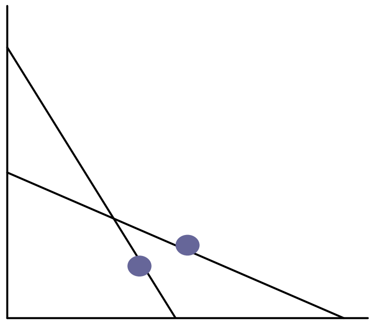
## 第五节　成本最小化弱公理与比较静态

### 一、弱公理

若在 $w'$ 下选择了 $x'$ 则必有 $w'x'\le w'x$，$x'$ 刚好生产 $y$，$x$ 是刚好生产 $y$ 的其它投入束。

### 二、图示





三、比较静态

$$\Delta w \Delta x \le 0$$

## 第六节　寻回性

一、据投入要求集的单调性和凸性构造内界

$VI = \{x;\ \text{含观测点的单调凸集}\}$

二、据成本最小化弱公理构造外界

$VO = \{x;\ w' x' \le w' x\}$

# 第五章　成本函数

第一节　各种成本函数
第二节　成本曲线
第三节　长期与短期成本曲线的关系
第四节　成本函数的特性
第五节　包络定理
第六节　使用成本函数的比较静态

注：前 3 节是关于参数 y 的比较静态，第 4、第 6 节是关于参数 w 的比较静态，第 5 节可适用于二者。

## 第一节　各种成本函数

**一、短期成本函数**

$$STC(w,y,x_f)=\min w_v x_v + w_f x_f$$

$$x.t.\quad f(x)=y$$

$$x_v{*}=x_v(w,y,x_f)$$

$$STC(w,y,x_f)=w_v x_v(w,y,x_f)+w_f x_f$$

**二、长期成本函数**

$$LTC(w,y)=\min wx$$

$$s.t.\ f(x)=y$$

$$x{*}=x(w,y)$$

$$LTC(w,y)=wx(w,y)$$

**三、关系**

$$LTC(w,y)=\min\nolimits_{xf}\ STC(w,y,x_f)$$

注：长期成本函数有两种方法，1、直接求解；2、先求短期，再求长期。

**四、规模报酬不变下的成本函数－关于参数 y 的一次齐次函数**

$c(w,ty)=tc(w,y)$，当 $t=1/y$ 时有：

$$c(w,y)=yc(w)$$

证明：第一，据规模报酬不变有 $f(x)=y, f(tx)=tf(x)=ty$，这说明，如果投入 x 可以生产 y，那么投入 tx 就可以生产 ty。

第二，设 x 是生产 y 的成本最小化选择，即 $wx \le wx'$，则对正数 t 有 $twx \le twx'$。这说明，如果 x 是生产 y 的最优，那么投入 tx 也是生产 ty 的最优，扩展线是过原点的直线。

综合，$c(w,ty)=w\times(tx)=t\times(wx)=tc(w,y)$

第一个等号是因为 tx 是生产 ty 的最优，第三个等号是因为 x 是生产 y 的最优。

例子：证明，如果生产函数是 K 次齐次的，那么成本函数是 1/K 次齐次的。

生产函数 K 次齐次意味着如果 x 能生产 y 则 tx 能生产 $t^K y$，或者 $t^{1/K}x$ 能生产 ty。另外由公

理可知，如果 x 是生产 y 的最优选择，则 $t^{1/K}x$ 是生产 ty 的最优选择。所以，

$c(w,ty)=w(t^{1/K}x)=t^{1/K}wx=t^{1/K}c(w,y)$。

## 第二节　成本曲线

**一、短期成本曲线**

**二、长期成本曲线**

## 第三节　长、短期成本曲线的关系

长期成本线是短期成本线的下包络线

证明：$c(w,y)\le c(w,y,z^*)$

$$let, g(y)=c(w,y,z^*)-c(w,y)$$

$$g'(y)=\frac{\partial c(w,y^*,z^*)}{\partial y}-\frac{\partial c(w,y^*)}{\partial y}=0$$

$$\therefore \frac{\partial c(w,y^*,z^*)}{\partial y}=\frac{\partial c(w,y^*)}{\partial y}$$

再证李·查特里原理

$$g''(y)=\frac{\partial^2 c(w,y^*,z^*)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 c(w,y^*)}{\partial y^2}\ge 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 c(w,y^*,z^*)}{\partial y^2}\ge\frac{\partial^2 c(w,y^*)}{\partial y^2}$$

用包络定理证明：

$$c(w,y)=\min_z c(w,y,z)$$

$$\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}=\left.\frac{\partial c(w,y,z)}{\partial y}\right|z=z(w,y)$$

由此可知“包络”二字的由来。

## 第四节　成本函数的特性

**一、单调性：是 w 的增函数**

设 $w'<w, c(w,y)=wx, c(w'y)=w'x'$

$$c(w',y)=w'x'\le w'x<wx=c(w,y)$$

**二、齐次性：是 w 的一次齐次函数**

$$let: c(w,y)=wx, or\ wx\le wx' \Rightarrow twx\le twx'\ or\ c(tw,y)=twx$$

$$\therefore c(tw,y)=twx=tc(w,y)$$

**三、凹凸性：是 w 的凹函数**

$$
\begin{aligned}
&let: c(w,y)=wx\\
&\quad c(w',y)=w'x'\\
&\quad c(w'',y)=w''x''\\
&\quad w''=tw+(1-t)w'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore c(w'',y)&=w''x''\\
&=twx''+(1-t)w'x''\\
&\geq twx+(1-t)w'x'\\
&=tx(w,y)+(1-t)c(w',y)
\end{aligned}
$$

图象说明：随性成本函数 $c^*=w_1x_1*+\sum_2 w_i*x_i*$

**四、连续性：是 w 的连续函数。**

目标函数 wx 的值域是非空紧集，约束集 V(y)中非空紧集。

$$
\begin{aligned}
&c(w,y)=\min wx\\
&s.t.\ \ x\ in\ V(y)
\end{aligned}
$$

**五、导数特性：导函数是条件要素需求函数**

$$\frac{\partial c(w,y)}{\partial w_i}=x_i(w,y)$$

证明方法：图示法、函数构造法、包络定理法。

$$g=c(w,y)-wx*$$

## 第五节　包络定理Ⅱ

定理：值函数对某参数的偏导数等于拉格朗日函数在最优点处对该参数的偏导数。

$$\frac{\partial M(a)}{\partial a_i}=\frac{\partial L(x,a)}{\partial a_i}\bigg|x=x(a)$$

证明：$\frac{\partial M(a)}{\partial a_i}=\frac{\partial L(x,a)}{\partial a_i}\bigg|x=x(a)+\sum\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial a_i}\bigg|x=x(a)$

应用：1、证明谢泼德引理

2、边际成本与拉格朗日乘子

## 第六节　使用成本函数的比较静态

一、$c(w,y)$ 的单调性$\Rightarrow$ $x(w,y)$ 的非负性

$$\frac{\partial c(w,y)}{\partial w_i}=x_i(w,y)\geq 0$$

二、$c(w,y)$ 的一次齐次性$\Rightarrow$ $x(w,y)$ 的零次齐次性

三、$c(w,y)$的凹性$\Rightarrow x(w,y)$的自价格效应

四、$c(w,y)$的连续性$\Rightarrow x(w,y)$的交叉价格效应

附：$dwdx \le 0$的证明$\begin{cases} x = x(w), \\ dx = Dx(w)(dw)^T = D^2c(w)(dw)^T, \\ dwdx = dwD^2c(w)(dw)^T \le 0 \end{cases}$

例子：已知成本函数求解生产函数

1、CD 成本函数

我们在已知生产函数$y = K^aL^b$

的情况下可得到成本函数为：

$c = a^{-a}b^{-b}{w_K}^a{w_L}^b y \quad a+b=1$

现在反过来操作。

$$\begin{cases} K = \dfrac{\partial c}{\partial w_K} = a^b b^{-b}{w_K}^{-b}{w_L}^b y \\ L = \dfrac{\partial c}{\partial w_L} = a^{-a}b^a{w_K}^a{w_L}^{-a} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{w_L}{w_K} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{K}{y}\right)^{\frac{1}{b}} \\ \dfrac{w_L}{w_K} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{y}{L}\right)^{\frac{1}{a}} \end{cases}$$

$$\left(\frac{K}{y}\right)^{\frac{1}{b}} = \left(\frac{y}{L}\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$y = K^aL^b$$

2、里昂惕夫成本函数

$c = y\min\{w_1, w_1\}$

如果$w_1 < w_2$，则成本函数为

$c = yw_1$

$x_1 = \partial c / \partial w_1 = y$

$x_2 = \partial c / \partial w_2 = 0$

如果$w_1 > w_2$，则成本函数为

$c = yw_2$

$x_1 = \partial c / \partial w_1 = 0$

$x_2 = \partial c / \partial w_2 = y$

所以生产函数为：$y = x_1 + x_2$

3、线性成本函数

$c = y$（$w_1 + w_1$）

如果$w_1$与$w_2$的关系如何都有

$x_1 = \partial c / \partial w_1 = y$

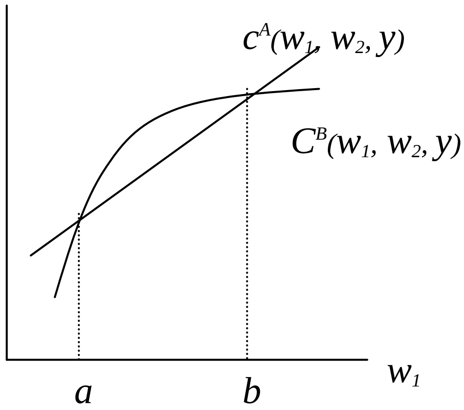
$x_2 = \partial c / \partial w_2 = y$

即成本最小化要求$y = x_1 = x_2$

所以生产函数为$y = \min\{x_1, x_2\}$

**例子：识图**

当要素 1 价格为 $a$ 时哪个厂商投入更多要素 1，当要素 1 价格为 $b$ 时哪个厂商投入更多要素 1？哪个厂商的生产函数有更高的替代弹性？




**例子：规模弹性**。如果规模弹性定义为$e(x) \equiv \dfrac{df(tx)}{dt}\dfrac{t}{f(x)}\bigg|_{t=1}$，证明规模弹性等于长期平均成本与长期边际成本之比。

$$e(x) \equiv \frac{df(tx)}{dt}\frac{t}{f(x)}\bigg|_{t=1}$$

$$= \frac{\sum \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i}{f(x)} = \frac{\sum w_i x_i}{\lambda f(x)} = \frac{c(w, y)}{\lambda y}$$

$$= \frac{LAC}{LMC}$$

例子：证明 K 次齐次生产函数对应的成本函数是 1/K 次齐次的。

$f(tx) = t^K f(x)$或者$f(t^{1/K}x) = tf(x)$

如果投入束 x 可生产 y，则投入束 tx 可生产 $t^K$y；或者如果投入束 x 可生产 y，则投入束 $t^{1/K}$x

可生产 ty。又

如果$c(w,y)=wx$,则有$wx<wx'$,

$w(t^{1/K}x)<w(t^{1/K}x'),c(w,ty)=w(t^{1/K}x)$

以上表明，如果 x 是生产 y 的最优选择，那么 $t^{1/K}x$ 是生产 ty 的最优选择。所以

$c(w,ty)=w(t^{1/K}x)=t^{1/K}(wx)=t^{1/K}c(w,y)$

# 第七章 效用最大化



## 第一节 偏好

偏好假定的目的是为构造一个性状良好的效用函数，即构造一个连续的单调递增的拟凹效用函数。

一、存在性假定（完备性、自返性、传递性）

二、连续性假定

三、单调性假定（强单调性、弱单调性、局部非饱和性）

四、拟凹性假定（边际替代率递减）

[数] 拟凹函数

定义：一个函数是拟凹的，当且仅当上水平集为凸集。上水平集为凸集的数学语言是：上水平集中任意两点的凸组合也落在上水平集中，任意给定上水平集中的两点 x’与 x’’，有下式成立。

$$f(tx'+(1-t)x'') \geq \min(f(x'), f(x''))$$

水平集、上水平集与下水平集。使得函数值等于某一常数 y 的所有点的集合叫参数为 y 的水平集；使得函数值大于或等于某一常数 y 的所有点的集合叫参数为 y 的上水平集；函数值小于或等于某一常数的所有点的集合为下水平集；

$$E(y)=\{x;\ f(x)=y, \forall y\}$$
$$U(y)=\{x;\ f(x)\geq y, \forall y\}$$
$$D(y)=\{x;\ f(x)\leq y, \forall y\}$$

4、凹函数一定是拟凹函数。假定 f(x)为凹函数，它必满足：

$$f(tx'+(1-t)x'') \geq tf(x')+(1-t)f(x'')$$

由于：$tf(x')+(1-t)f(x'') \geq \min(f(x'), f(x''))$

所以：$f(tx'+(1-t)x'') \geq \min(f(x'), f(x''))$

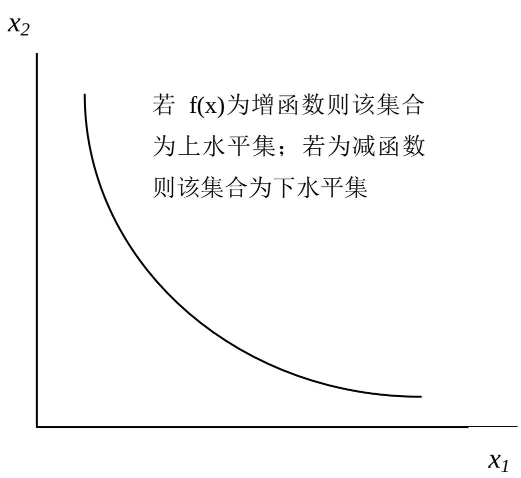
## 第二节 效用最大化

一、一阶条件

二、二阶条件

- $u(x)$ 拟凹或无异线凸向原点。
- 满足线性约束下的二次型为负。
- L 的海塞阵负半定。

三、间接效用函数的性质。



1、单调性。P 的减函数，m 的增函数。

证明：P 增大时预算集变小，m 增大时预算集变大

2、齐次性。P 与 m 的 0 次齐次函数。

证明：P 与 m 加倍时预算集不变。

3、凹凸性。P 的拟凸函数。

> 附：拟凸函数。
>
> 一个函数是拟凸的，当且仅当下水平集为凸集，或者
>
> $f(tx+(1-t)x') \le \max(f(x), f(x'))$ 　水平集、上水平集与下水平集：
>
> $$D=\{x;\ f(x)=y, \forall y\}$$
> $$UD=\{x;\ f(x)\ge y, \forall y\}$$
> $$DD=\{x;\ f(x)\le y, \forall y\}$$

证明间接效用函数为拟凸函数

令：$v(p,m)\equiv v(p), v(p',m)\equiv v(p'), v(p'',m)\equiv v(p''), p''\equiv tp+(1-t)p'$

构造预算集：

$$B=\{x; px\le m\}, B'=\{x; p'x\le m\}, B''=\{x; p''x\le m\}$$

在 $B\bigcup B'$ 集外部任取一点 $\bar{x}$ 。现在要证该点一定不在 $B''$ 中，即 $B\bigcup B'\supset B''$ 。

$$p\bar{x}>m, p'\bar{x}>m, \Rightarrow tp\bar{x}>tm, (1-t)p'\bar{x}>(1-t)m$$
$$\Rightarrow (tp+(1-t)p')\bar{x}>m \Rightarrow p''\bar{x}>m$$

最后一个不等式说明 $\bar{x}$ 不在 $B''$ 中。即 $B\cup B'\supset B''$ 。

最后证明原命题。$v(p'')\le \max\{v(p), v(p')\}$

这是因为：

$$v(p'')=\max u(x),\ s.t. x\ in\ B''$$
$$\max\{v(p), v(p')\}=\max u(x), s.t.\ x\ in\ B\cup B'$$

## 第三节　支出最小化

一、支出函数与希克斯需求函数

$$e(p,u)=\min\ px \qquad s.t.\ u(x)=u$$
$$p=\lambda^* Du(x^*)$$
$$u(x)=u$$
$$x^*\big|_{u=const}=h(p,u)$$

注：〇支出函数与间接效用函数。

〇支出函数与成本函数。

二、支出函数的性质

1、 单调性。是 P 的增函数。

> 例子:老干部效用函数为 u=lnx+lny，在 80 年其效用水平为 $u_0$，考虑到 81 年价格水平会发生变化，政府的目的是维持 80 年效用水平不变。1、如果政府直接为老干部配给物质，应该根据什么原则配给；2、如果政府给老干部发退休金，所发数量应该根据什么原则决定。

2、 齐次性。是 P 的一次齐次函数。

3、 凹凸性。是 P 的凹函数。

4、 连续性。是 P 的连续函数。

5、 导数特性。支出函数对某物品价格的偏导数等于该物品的希克斯需求函数，即：

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}=h_i(p,u)$$

## 第四节　重要恒等式

一、对偶恒等式

$$e(p,v(p,m))\equiv m$$

$$v(p,e(p,u))\equiv u$$

$$h_i(p,v(p,m))\equiv x_i(p,m)$$

$$x_i(p,e(p,u)\equiv h_i(p,u)$$

二、罗伊恒等式

$$x_i(p,m)=-\frac{\partial v(p,m)/\partial p_i}{\partial v(p,m)/\partial m}$$

证明：在效用最大化问题中据包络定理分别对参数 $p_i$ 和 $m$ 求导。

## 第五节　货币度量的效用函数

一、货币度量的直接效用函数

$$m(p,x)\equiv e(p,u(x))$$

固定 x，为支出函数。固定 p，为效用函数，且其单位为货币。其原因是：

1、 $e(p,u(x))$ 是 $u(x)$ 的一个单调变换，仍为效用函数。

2、将效用单位转换成货币单位。

理解：在 x 下效用为 u(x),折算成货币单位为 e(p,(u(x))。效用是消费束的函数。

二、货币度量的间接效用函数

$$\mu(p;q,m)\equiv e(p,v(q,m))$$

注：货币度量的效用函数又称为最低收入函数或补偿函数。

例子：效用函数均为 $u(x_1,x_2)=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$。求：马歇尔需求函数、间接效用函数、支出函数、希克斯需求函数与货币度量的效用函数。

$$\max u(x),\ s.t. px=m, x_1=0.5p_1^{-1}m$$

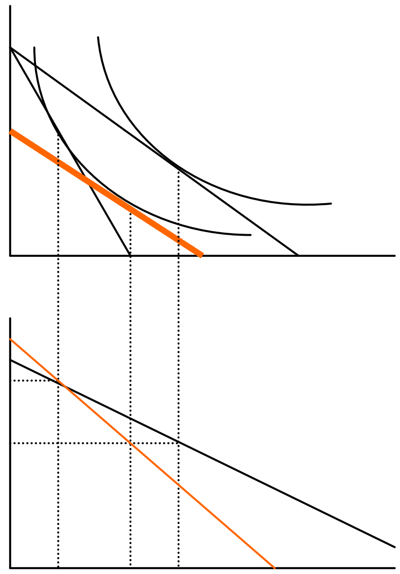
$$v(p,m)=0.5p_1^{-1/2}p_2^{-1/2}m$$

$$e(p,u)=2p_1^{1/2}p_2^{1/2}u$$

$$h_1=\partial e/\partial p_1=p_1^{-1/2}p_2^{1/2}u$$

$$\mu(p:q,m)=e(p,v(q,m))=2p_1^{1/2}p_2^{1/2}v(q,m)=p_1^{1/2}p_2^{1/2}q_1^{-1/2}q_2^{-1/2}m$$

马歇尔需求曲线与希克斯需求曲线的图象推导。



# 第八章　选择



## 第一节　比较静态（图象分析）

一、**对参数** m，收消费线与恩格尔曲线

二、**对参数** p，价格消费线与需求曲线

## 第二节　斯卢茨基方程（使用对偶的比较静态）

**方程：** $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}=\dfrac{\partial h_i}{\partial p_j}-x_j\dfrac{\partial x_i}{\partial m}$（表示了马歇尔、希克思、恩格尔需求曲线斜率的关系）

**证明方法：** 恒等式法、微分法、差分法（按斯卢茨基划分）

**用对偶法证明**

$$h_i(p,u)=x_i(p,e(p,u))$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i}{\partial p_j}+x_j\frac{\partial x_i}{\partial m}$$

**弹性形式**

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}=\frac{\partial h_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{h_i}-\frac{\partial x_i}{\partial m}x_i\frac{p_i}{x_i}\frac{m}{m}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}=\frac{\partial h_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{h_i}\frac{p_i x_i}{m}\frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}$$

$$e_x=e_h-\frac{p_i x_i}{m}e_m$$

马歇尔需求弹性=希克斯需求弹性-支出比率＊收入弹性

**正常品、劣等品与吉芬品**

判断正常品与劣等品的标准是需求收入弹性是否大于 0，判断一般品与吉芬品的标准是需求弹性理否大于 0，吉芬品是大量消费的劣等品。

$$\begin{cases} E_X < 0 & \text{一般品} \\ E_X > 0 & \text{吉芬品} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_M > 0 \quad \text{正常品} \begin{cases} E_M > 1 & \text{奢侈品} \\ E_M < 1 & \text{必需品} \end{cases} \\ E_M < 0 \quad \text{劣等品} \end{cases}$$

| | EM>0 正常品 | EM<0 劣等品 |
|---|---|---|
| EX<0 一般品 | 一般正常品 | 一般劣等品 |
| EX>0 特殊品 | 特殊正常品，炫耀品 | 特殊劣等品，吉芬品 |

**需求弹性的决定因素**

替代品多少与替代程度，生活必要程度，支出比率

## 第三节　希克斯需求函数的性质

希克斯需求函数 $h_i(p,u)$ 与条件要素需求函数 $x_i(w,y)$ 类似。

齐次性：关于价格是 0 次齐次的。$h(tp,u)=h(p,u)$

单调性：自价格效应为负。$\partial h_i / \partial p_i < 0$

对称性：交叉价格效应对称。$\partial h_i / \partial p_j = \partial h_j / \partial p_i$

单调性和对称性等价于替代矩阵是对称负定矩阵。

例子：卢茨基方程中的替代效应

例子：交叉价格弹性对称性问题

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}=\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{h_i}-\frac{p_j x_j}{m}\frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{m}{x_i}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j}=\frac{\partial h_j}{\partial p_i}\frac{p_i}{h_j}-\frac{p_i x_i}{m}\frac{\partial x_j}{\partial m}\frac{m}{x_j}$$

任意两种物品的交叉价格弹性不对称，因为上两式的右端只有交叉价格效应对称。完全互补品的交叉价格弹性也一般不对称，因为上两式的右端交叉价格效应和收入弹性对称，还可以认为 $x_i = x_j$，但一般情况下 $p_i \neq p_j$。完全互补品的交叉弹性相等的条件是价格相等（将数量作适当处理）。

## 第四节　利用一阶条件的比较静态

微分法推导斯卢茨基方程，略

## 第五节　可积性问题

**[数]：可积性条件。**

一个偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = g_1(y,x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = g_2(y,x) \end{cases}$$

可积的条件是

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1}，\text{或者} \frac{\partial y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2 \partial x_1}$$

**一、支出函数是可积性。**

支出函数是可积的，因为海塞阵为对称阵。

**二、由需求函数求补偿函数的方法**

将需求函数中的$m$变为$\mu$， $x_i$变为$\partial \mu / \partial p_i$，然后求解下列偏微分方程组：

$$\frac{\partial \mu}{\partial p_i} = x_i(p,\mu)$$

$$\mu\Big|_{p=q} = m$$

证明：$\dfrac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = h_i(p,u) = x_i(p,e(p,u))$

$$\frac{\partial e(p,v(q,m))}{\partial p_i} = x_i(p,e(p,v(q,m)))$$

$$\frac{\partial \mu(p;q,m)}{\partial p_i} = x_i(p,\mu(p;q,m))$$

［数］ 一阶线性微分方程

第一步，求对应的齐次方程的通解；
第二步，代入原方程求通解中的变易常数（由常数变易而来的函数）；
第三步，将结果代回通解（常数由初始条件决定）。

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x) \quad \text{......} \quad (1)$$

第一步，求 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 的通解

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

$$\ln y=-\int p(x)dx+\ln v(x)$$

$$y=v(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

V(x)由常数变易法得来

第二步，代入原方程求变易函数 V(x)（左端除含 V’的项外其它项抵消了）

$$v'(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)=Q(x)$$

$$v(x)=\int\left(Q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)\right)dx+C$$

第三步，代回通解

$$y=\left[\int\left(Q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)\right)dx+C\right]\exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

常数 C 由初始条件决定

## 第六节 对偶

原问题 $v(p,m)=\max_x u(x), \quad s.t.\ px=m$

对偶问题 $u(x)=\min_p v(p), \quad s.t.\ px=1$

$m$ 标准化为 1，标准化问题。

对偶性：值函数与目标函数，最大化与最小化，外生与内生

注：将收入标准化，是一种处理方式，另一种处理方式是将某物品价格标准化，然后利用预算约束消除间接效用函数中的收入变量，既：

$$u(x)=\min_q v(q,qx),$$

其中，$q_n=1, q_i=p_i/p_n, qx=m/p_n$

五六节综合：$x(p,m)\rightarrow e(p,v(q,m))\rightarrow v(q,m)\rightarrow u(x)$

## 第七节 显示偏好

### 一、显示偏好概念

- 直接显示偏好：如果在价格 $p'$ 下，在所有可行消费束中选择了 $x'$，则 $x'$ 是其它可

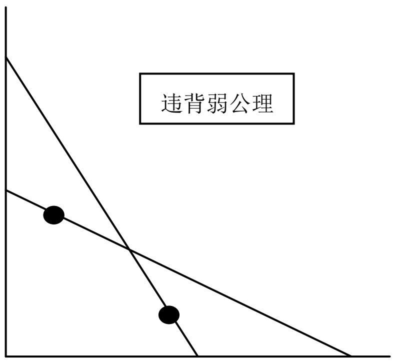
行消费束的直接显示偏好。$x'$ 是 $x''$ 的直接显示偏好等价于 $p'x' \geq p'x''$，只要消费者在 $p'$ 下选择了 $x'$。

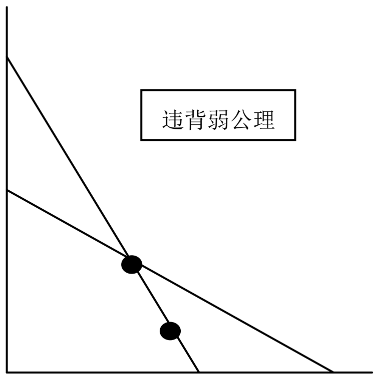
- 间接显示偏好。如果 $x'$ 是 $x''$ 的直接显示偏好，且 $x''$ 是 $x'''$ 的直接显示偏好，那么 $x'$ 是 $x'''$ 的间接显示偏好。

**二、显示偏好公理**

1、弱公理：

- 若 $x' R^D x''$, 且 $x' \neq x''$, 则 $x'' R^D x'$ 不成立。或者
- 若 $p'x' \geq p'x''$，且 $x' \neq x''$，则 $p''x'' \geq p''x'$ 不成立（只能是 $p''x'' < p''x'$），既不等式 $p'x' \geq p'x''$ 和 $p''x'' \geq p''x'$ 不能同时成立，如果 $x' \neq x''$。




2、强公理：若 $x'Rx''$, 且 $x' \neq x''$, 则 $x''Rx'$ 不成立。

注：弱公理仅仅指直接显示偏好的情况，强公理只是将弱公理推广到了直接与间接显示偏好的情况，强公理只是在弱公理的基础上考虑了传递性。

3、一般性公理：若 $x'Rx''$, 则 $x'' P^D x'$ 不成立。或 $p'x' \geq p'x''$, 则 $p''x'' > p''x'$ 不成立。

例子：用物价指数判断生活水平的变化。

**例子：指数对比与生活水平变化**

- 拉氏物价指数: $pl = p^t x^0 / p^0 x^0$
- 帕氏物价指数: $pp = p^t x^t / p^0 x^t$
- 支出指数: $pm = p^t x^t / p^0 x^0$

三种情况:

- 如果支出指数大于拉氏指数，则生活水平提高

$$pm \geq pl$$

$$p^t x^t / p^0 x^0 \geq p^t x^0 / p^0 x^0$$

$$p^t x^t \geq p^t x^0$$

$x^t$ 是 $x^0$ 的显示偏好，生活水平提高。

- 如果支出指数低于帕氏指数，则生活水平下降

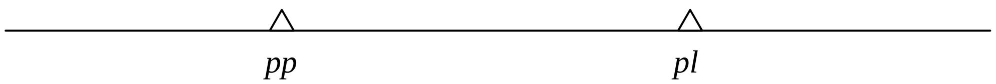
$$pm \leq pp$$

$$p^t x^t / p^0 x^0 \leq p^t x^t / p^0 x^t$$

$$p^0 x^0 \geq p^0 x^t$$

$x^0$ 是 $x^t$ 的显示偏好，生活水平下降。

- 如果支出指数介于两者之间，则无法判断。$pp < pm < pl$ 时不能确定。




**例子：判断储蓄行为**

用弱公理证明：1、如果一个人在低利率时做出了正储蓄决策，那么在高利率时仍然会做出正储蓄决策；2、利率上升，正储蓄者处境改善。

证明：跨时期问题中两个时期的支出复合值之和为 $(1+r)x_1 + x_2$，记为 $px$。利率上升前为

$(1+r')x_1' + x_2'$，记为 $p'x'$；利率上升后为 $(1+r'')x_1'' + x_2''$，记为 $p''x''$。

1、 如果不是这样，利率上升后储蓄者变为负债者，则必有 $p'x' \geq p'x''$ 和 $p''x'' \geq p''x'$ 同时成立。这违背显示偏好弱公理。

利率上升后必有 $p''x'' \geq p''x'$，变化后的需求束是变化前的显示偏好。

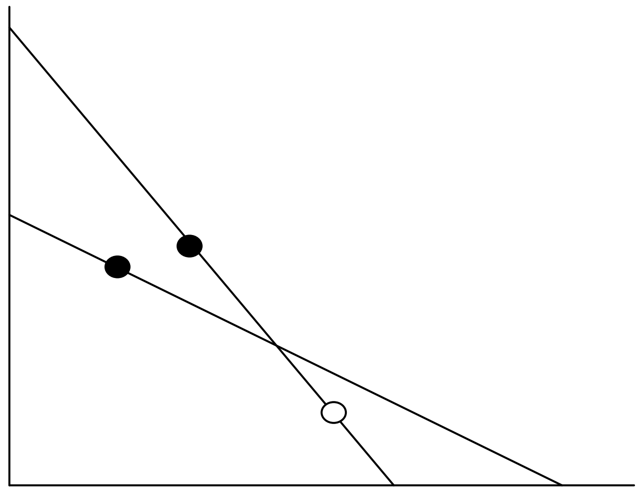


图 8.5　利率上升后储蓄者还是储蓄者

## 第八节　最大化的充分条件（略）

## 第九节　使用显示偏好的比较静态

### 一、利用希克斯补偿

**希克斯补偿**：补偿消费者，以使效用水平保持不变。价格变化后希克斯补偿的货币数量由下式决定

$m+\Delta m=e(p+\Delta p,v(p,m))$ 或者 $x(p,m)\sim x(p+\Delta p,m+\Delta m)$

**比较静态**：因两点无差异，不存在显示偏好关系，所以：

$$px(p,m)<px(p+\Delta p,m+\Delta m)$$

$$(p+\Delta p)x(p+\Delta p,m+\Delta m)<(p+\Delta p)x(p,m)$$

联立解出：$\Delta p\Delta x<0$（x 相当于 h）

### 二、利用斯卢茨基补偿

**斯卢茨基补偿**：补偿消费者，以使原消费束购买得起。斯卢茨基补偿的货币数量由下式决定：

$$(p+\Delta p)x(p,m)=m+\Delta m$$
$$\Delta m=\Delta px(p,m)$$

**比较静态**：原需求束为 $x(p,m)$，价格变化并补偿后的新需求束为 $x(p+\Delta p,m+\Delta m)$，两点都在新预算线 $(p+\Delta p)x=m+\Delta m$ 上。由于在一条预算线上，所以：

$$(p+\Delta p)x(p+\Delta p,m+\Delta m)=(p+\Delta p)x(p,m)$$

上式意味着新消费束是原消费束的显示偏好。由于在(p,m)下 $x(p+\Delta p,m+\Delta m)$ 购买不起，

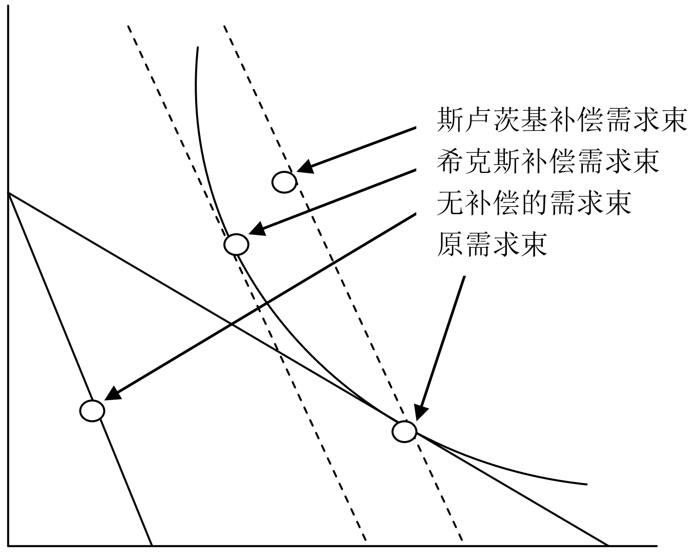
所以：

$$px(p,m) < px(p+\Delta p, m+\Delta m),$$

上式意味着原消费束不是新消费束的显示偏好。两式相加得到：

$$\Delta p \Delta x < 0$$

**三、两种补偿的图示**




## 第十节　斯卢茨基方程的抽象解释

$$x_i(p+\Delta p_j, m) - x_i(p,m)$$
$$= [x_i(p+\Delta p_j, m) - x_i(p+\Delta p_j, m+\Delta m)] + [x_i(p+\Delta p_j, m+\Delta m) - x_i(p,m)]$$
$$= [x_i(p+\Delta p_j, m+\Delta m) - x_i(p,m)] - [x_i(p+\Delta p_j, m+\Delta m) - x_i(p+\Delta p_j, m)]$$
$$\Delta x_i\big|_{m=const} = \Delta h_i\big|_{u=const} - \Delta x_i\big|_{p=const}$$
$$\frac{\Delta x_i\big|_{m=const}}{\Delta p_j} = \frac{\Delta h_i\big|_{u=const}}{\Delta p_j} - \frac{\Delta x_i\big|_{p=const}}{\Delta p_j}$$

按斯卢茨基补偿定义，j 物品价格变化后使原消费束购买得起必须补偿 $\Delta m = x_j \Delta p_j$，所以：

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta p_j} = \frac{\Delta h_i}{\Delta p_j} - x_j \frac{\Delta x_i}{\Delta m}$$

## 第十一节　恢复性

问题：构造通过一个非观测点的无差异曲线
方法：通过显示偏好，偏好的单调性和凸性构造内外界

一个观测点的例子。观测点为（ $p', x'$），如图 8.4 中的预算线和点 $x'$ 所示。要构造通过点 $x^0$ 的无差异曲线。据显示偏好， $x' \succ x^0$ ；根据凸性（上水平集为凸集，即

$u(tx'+(1-t)x^0) \geq \min\{u(x'), u(x^0)\} = u(x^0)$），两点连线上的任何一点都优于点 $x^0$，根据单调性…。所以集合 RP($x^0$)中的点优于点 $x^0$，该集合是点 $x^0$ 的上水平集的内界。同样根据显示偏好和凸性可以判断 $x^0 \succ x$，这是因为点 $x'$ 和点 $x$ 的连线上的任何一点都优于 x。再据单调性…。所以，集合 RW 中任何一点都劣于 $x^0$。集合 RW 的补集为外界。

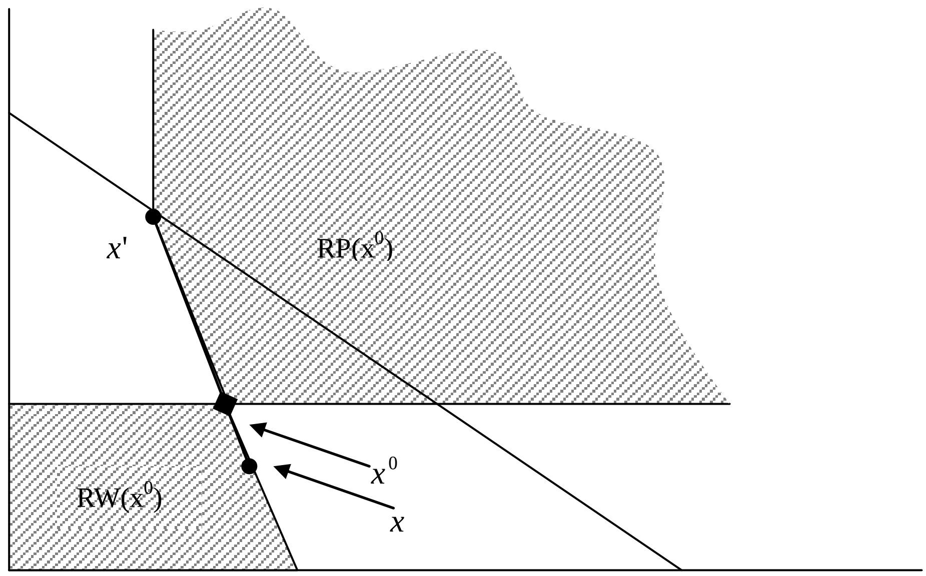



图 8.4　1 个观测下的恢复

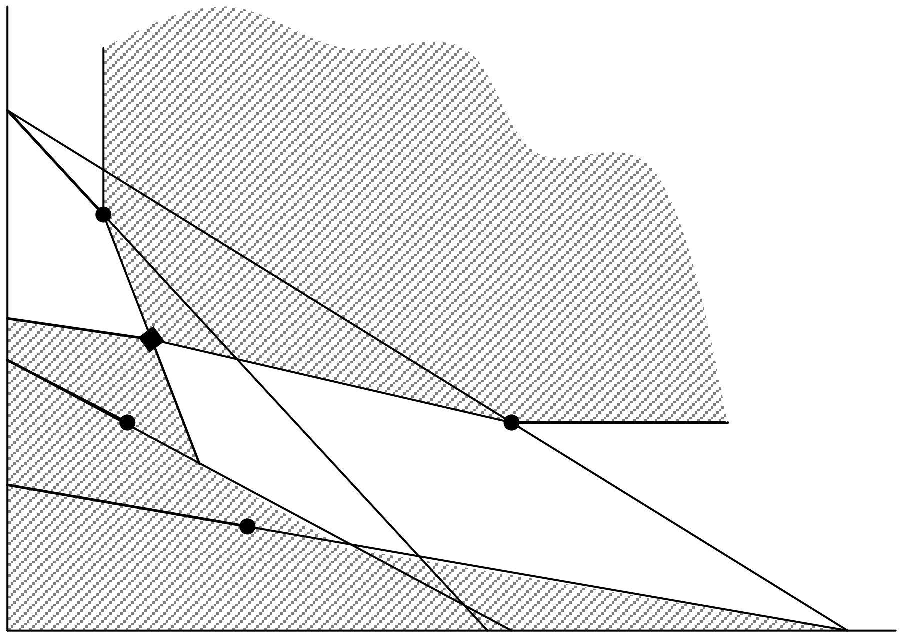


图 8.5　4 个观测下的恢复

# 第九章　需求



## 第一节　预算约束中的禀赋

**一、禀赋约束** $px = p\bar{x}$

**禀赋与禀赋收入**：定义禀赋为各种物品的初始拥有量 $\bar{x}$，禀赋的市场价值为禀赋收入 $m \equiv p\bar{x}$

**几种常见的禀赋约束**：农民的禀赋约束，时间禀赋约束，跨期禀赋约束和状态禀赋约束。农民的禀赋为农产品初始拥有量，时间禀赋为个人时间拥有量（价格为工资率）跨期禀赋为各时期收入（价格为贴现因子或复合因子的函数），状态禀赋为各种状态下的所得（价格为各种状态发生的概率）。

**二、禀赋约束下的选择**

$$v(p,m) = \max u(x)$$
$$px = p\bar{x}$$
$$x^* = x(p,m),$$
$$m = p\bar{x}$$

**三、禀赋约束下的斯卢茨基方程**

$$\frac{dx_i}{dp_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} + \bar{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial m} = \frac{\partial h_i}{\partial p_i} + (\bar{x}_i - x_i)\frac{\partial x_i}{\partial m}$$

**例子：劳动供给**

$$\max u(c,H) \quad s.t.\ pc + wH = wT$$
$$L = u(c,H) + \lambda(m - pc - wH)$$
$$c^* = c(p,w,m)$$
$$H^* = H(p,w,m)$$

$$\frac{dH}{dw} = \frac{\partial H}{\partial w} + \frac{\partial H}{\partial m}T = \frac{\partial H_h}{\partial w} + \frac{\partial H}{\partial m}(T - H)$$
$$\frac{dL}{dw} = \frac{\partial L_h}{\partial w} + \frac{\partial L}{\partial m}L$$

右端第一项为替代效应，它总是为正（希克斯闲暇的自价格效应为负）；第二项为收入效应，如果闲暇为正常品，第二项总是为负；总效应的正负号由这两个效应的大小决定。当劳动供给量小时，一方面 L 小，另一方面 H 大，H 大意味着闲暇即使是正常品它也是较低档的，因此$\partial H / \partial m$小，意味着$\partial L / \partial m$的绝对值小，因此收入效应小，没有超过替代效应，劳动供给曲线为正斜率。

**例子：消费与利率**

$v(R)=\max u(c_1,c_2),\ s.t.\,Rc_1+c_2=Rm_1+m_2$
$L=u(c_1,c_2)+\lambda(m-Rc_1-c_2)$
$c_1{*}=c_1(R,m)$
$\frac{dc_1}{dR}=\frac{\partial c_{h1}}{\partial R}+(m_1-c_1)\frac{\partial c_1}{\partial m}$

**例子：福利与利率**

$v(R)=\max u(c_1,c_2),\ s.t.\,Rc_1+c_2=Rm_1+m_2$
$L=u(c_1,c_2)+\lambda(m-Rc_1-c_2)$
$v'(R)=\lambda(m_1-c_1)$

## 第二节　相似偏好的特性

### 一、相似偏好

如果消费者的效用函数是一个相似函数，那么称他有相似偏好（因为效用函数的单调变换不改变偏好关系，所以相似偏好可作为一次齐次偏好来讨论，下面的讨论基于一次齐次）

### 二、图象特性

收入消费线是过原点的直线，沿线有：效用增加的倍数=各商品需求量增加的倍数=支出增加的倍数。

### 三、函数特性

1、收入加倍，效用加倍

$$v(p,tm)=tv(p,m),v(p,m)=v(p)m$$

2、效用加倍，支出加倍

$$e(p,tu)=te(p,u),e(p,u)=e(p)u$$

3、收入加倍，需求加倍

$$x(p,tm)=tx(p,n),x(p,m)=x(p)m$$

- 证明支出函数关于 u 是一次齐次的，即证明

  $e(p,tu)=te(p,u)$，当 $t=1/y$ 时有 $e(p,u)=ue(p)$

  证明：

  第一，据一次齐次偏好有 $u(x)=u,\ u(tx)=tu(x)=tu$，这说明，如果消费束 x 可实现效用水平 u，那么 tx 就可实现 tu。

  第二，设 x 是实现 u 的支出最小化选择，即 $px\le px'$，则对正数 t 有 $tpx\le tpx'$。

  这说明，如果 x 是实现 u 的支出最小选择，那么 tx 也是实现 tu 的最小选择。

  综合，$e(p,tu)=p\times(tx)=t\times(px)=te(p,u)$

  第一个等号是因为 tx 是实现 tu 的选择，第三个等号是因为 x 是实现 u 的选择。

- 证明间接效用函数关于 m 是一次齐次的

因为$e(p,u)=e(p)u$，所以$v(p,m)=m/e(p)\equiv mv(p)$

- 证明需求函数关于 m 是一次齐次的

$v(p,m)=u(x*)$

$tv(p,m)=tu(x*)$

$v(p,tm)=u(tx*)$

## 第三节　物品的归并

### 一、希克斯可分性

1、希克斯可分条件

一类商品中各商品价格同比例变动

2、确定一类商品的价格指数与数量指数

- 定义价格指数。 选择基期价格向量：$p^0=(p_1{}^0+p_2{}^0+\dots+p_s{}^0)$，据条件任一期的价格向量：$p=tp^0$，$t$ 就是价格指数。
- 据预算约束构造数量指数。

$px+qz=m$

$tp^0x+qz=m$

$tx^t+qz=m$

$x^t=p^0x=\sum_1^s p_i{}^0 x_i$ 就是数量指数。

3、消费者选择

$\max u(x^t,z),\quad s.t.\ tx^t+qz=m$

$x^t*=x^t(t,q,m)$

$z*=z(t,p,m)$

4、常见应用：两商品模型

$z*=z(t,p,m)=z(p/t,m/t)$

常用来研究某物品 z 的需求，把所有其它商品归为一类（亚束），选用消费品价格指数作为亚束的价格指数 t。

### 二、函数可分性

1、条件

a、 效用函数弱可分：$u(x,z)=u(v(x),z)$。或者说，z 消费量的改变不影响亚束 x 的偏好顺序，$(x',z)\succ(x,z)$，当且仅当$(x',z')\succ(x,z')$。这要求互补品不能分开。

b、 次效用函数是位似函数。

2、求解次效用最大化

$$\max v(x),\quad s.t.\ px = m_x$$
$$e(p,v) = e(p)v$$

3、定义$e(p)$为价格指数，$v$为数量指数。

4、求解总效用最大化。

$$\max u(v,z),\ s.t.\ e(p)v + qz = m$$

**例子：完全互补品归类**$u(\min\{x_1, x_2\}, x3)$

次效用$v(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2\}$最大化得支出函数为$e(p_1, p_2, v) = (p_1 + p_2)v$。取价格指数为$(p_1 + p_2)$，取数量指数为$v$。数量指数等于成套商品的套数。

附*、弹性关系

1、恩格尔加总：$\sum_{i=1}^{n} s_i\,\eta_i = 1$ 其中支出份额$s_i = p_i x_i / m$ $\eta_i$为$i$物品收入弹性

证明据预算约束。

2、古诺加总：$\sum_{i=1}^{n} s_i\,\varepsilon_{ij} = -s_j$ 其中支出份额$s_i = p_i x_i / m$ $\varepsilon_{ij}$为两物品交叉弹性

$$\sum p_i x_i(p,m) = m$$
$$\text{对}p_j\text{微分}x_j + \sum p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} = 0$$
$$\frac{p_j x_j}{m} + \sum p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}\frac{p_j}{m}\frac{x_i}{x_i} = 0$$

## 第四节 消费者归并（个别需求与市场需求）

**一、一般情况下的消费者归并**

$$X^j(p, m_1..m_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,j}(p, m_i)$$

**二、一般情况下市场需求函数的特点**

满足齐次性、连续性；但不满足斯卢茨基方程和显示偏好弱公理。

**三、高曼偏好下的消费者归并**

1、高曼偏好

$$v_i(p, m_i) = a_i(p) + b(p)m_i$$

注：相似偏好、拟线性偏好是高曼偏好特殊形式。

2、归并

$$x_i^{\ j} = -\frac{\partial v_i / \partial p^j}{\partial v_i / \partial m_i}$$

$$= -\frac{\partial a_i(p)/\partial p^j}{b(p)} - \frac{\partial b(p)/\partial p^j}{b(p)} m_i$$

$$X^j(p, M) = -\sum_i \frac{\partial a_i(p)/\partial p^j}{b(p)} - \frac{\partial b(p)/\partial p^j}{b(p)} \sum_i m_i$$

**四、高曼偏好下市场需求函数的特点**

全满足。因为合成的市场需求函数就象一个代表性消费者作出的选择一样。代表性消费者的间接效用函数为

$$V(p, M) = \sum a_i(p) + b(p)M$$

$$X^j(p, M) = -\frac{\partial V / \partial p^j}{\partial V / \partial M}$$

$$= -\sum_i \frac{\partial a_i(p)/\partial p^j}{b(p)} - \frac{\partial b(p)/\partial p^j}{b(p)} M$$

## 第五节　反需求函数与需求函数

$$\max u(x) \quad s.t.\ px = m$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \lambda p_i$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_i = \lambda p_i x_i$$

$$\sum \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_i = \lambda m = m \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} / p_i$$

$$p_i(x, m) = m \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \Bigg/ \sum \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_i$$

$$\min v(p, m) \quad s.t.\ px = m$$

$$\frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} = \mu x_i$$

$$\frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} p_i = \mu p_i x_i$$

$$\sum \frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} p_i = \mu m = m \frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} / x_i$$

$$x_i(p, m) = m \frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} \Bigg/ \sum \frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} p_i$$

# 第十章　消费者剩余



## 第一节　等价变动与补偿变动

**一、问题**

从事前状态$(p',m')$变到事后状态$(p'',m'')$，福利水平变动了多少。变动数量为间接效用函数之差$v(p'',m'')-v(p',m')$。我们可以利用补偿函数将这一变动转换成货币单位，即变成$\mu(p;p'',m'')-\mu(p;p',m')$。若选择$p=p'$就是等价变动，若选择$p=p''$就是补偿变动。

**二、等价变动**

定义：$EV=\mu(p';p'',m'')-\mu(p';p',m')$。其中，$(p',m')$为初始状态，$(p'',m'')$为终端状态，$\mu(p';p'',m'')$是用初始状态的货币购买力度量的终端状态的效用水平，$\mu(p';p',m')=m'$是用初始状态的货币购买力度量的初始状态的效用水平。

含义：等价变动是从初始状态到终端状态的效用水平的变动，效用水平是用货币单位度量的，货币购买力是用初始状态的物价水平来衡量的。

**三、补偿变动**

定义：$CV=\mu(p'';p'',m'')-\mu(p'';p',m')$。这里的货币购买力是用终端状态的物价水平衡量的。

含义：补偿变动是从初始状态到终端状态的效用水平的变动，效用水平是用货币单位度量的，货币购买力是用终端状态的物价水平来衡量的。

## 第二节　消费者剩余及其变动

**一、消费者剩余**

$$S'=\int_{p'}^{\infty}x(p,m)dp \qquad S''=\int_{p''}^{\infty}x(p,m)dp$$

**二、消费者剩余的变动**

$$SV=S''-S'=\int_{p''}^{P'}x(p)dp$$

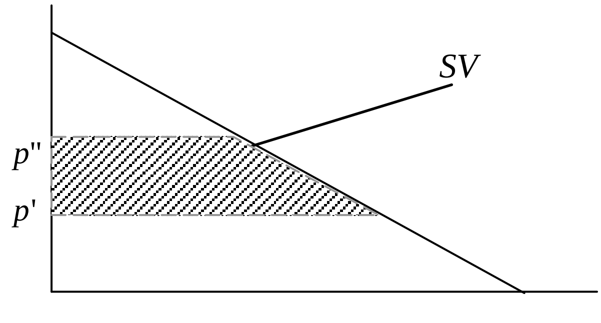



图 10.1　消费者剩余的变动

## 第三节　拟线性偏好

**一、拟线性效用函数** $u(x,z)=u(x)+z$

**二、效用最大化**

$\max u(x)+z,\ s.t.\ px+z=m$，或者　$\max u(x)+m-px$

$u'(x^*)=p,\qquad x^*=x(p)$

$v(p,m)=u(x(p))-px(p)+m=S(p)+m$

$e(p,u)=u-s(p)$

$\mu(p;q,m)=e(p,v(q,m))=s(q)+m-s(p)$

$h(p,u)=\partial e/\partial p=-s'(p)$

$x(p,m)=-(\partial e/\partial p)/(\partial e/\partial m)=-s'(p)$

## 第四节　拟线性偏好下的三种变动

$\mu(p;q,m)=e(p,v(q,m))=s(q)+m-s(p)$

$$
\begin{aligned}
EV &= \mu(p';p'',m'')-m' \\
&= m''+S(p'')-S(p')-m' \\
&= \Delta m+SV
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CV &= m''-\mu(p'';p',m') \\
&= m''-[S(p')-S(p'')+m'] \\
&= \Delta m+SV
\end{aligned}
$$

## 第五节　三种变动的进一步分析

**一、一般偏好、收入变化**

假定只有商品 1 价格变化。

$$
\begin{aligned}
EV &= \mu(p';p'',m'')-m' \\
&= m''-m'+\mu(p';p'',m'')-\mu(p'';p'',m'') \\
&= \Delta m+e(p',v(p'',m''))-e(p'',v(p'',m'')) \\
&= \Delta m+e(p',u'')-e(p'',u'') \\
&= \Delta m+\int_{p_1''}^{p_1'} h_1(p,u'')dp_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CV &= m''-\mu(p'';p',m') \\
&= m''-m'+\mu(p';p'm')-\mu(p'';p',m') \\
&= \Delta m+e(p',v(p',m'))-e(p'',v(p',m')' \\
&= \Delta m+e(p',u')-e(p'',u') \\
&= \Delta m+\int_{p_1''}^{p_1'} h(p,u')dp_1
\end{aligned}
$$

**二、一般偏好、收入不变**

$$EV = \int_{p''}^{p'} h(p, u'')dp = A + B + C$$

$$CV = \int_{p''}^{p'} h(p, u')dp = A$$

$$SV = \int_{p''}^{p'} x(p, m)dp = A + B$$

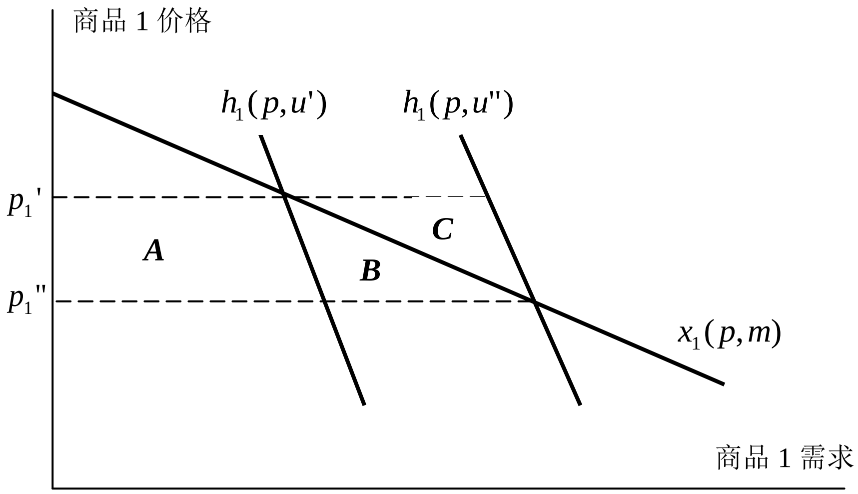



图 10.2　一般偏好收入不变条件下的三种变动

注：对于正常品，希克斯需求线较徒（据斯卢茨基方程证明），且随着效用水平提高，希克斯需求线右移（据支出最小化问题的一阶恒等式进行比较静态分析）。

### 第六节　拟线性偏好下的加总

在拟线性偏好下可以用总消费者剩余的变动度量总福利的变动。拟线性偏好下三种变动相等，社会福利变动可以用市场需求线下的剩余变动来度量（假定收入不变）。

$$EVi = CVi = SVi = S_i(p'') - S_i(p') = \int_{P''}^{p'} x_i(p)dp$$

$$\sum EVi = \sum CVi = \sum SVi = \sum [S_i(p'') - S_i(p')] = \int_{P''}^{p'} \sum [x_i(p)]dp$$

$$EV = CV = SV = \int_{p''}^{p'} X(p)dp$$

**例子：产品税与一次性总付税**

**解法 1　利用显示偏好**

在产品税下假定税率为 t，使预算约束变为$(p_1+t)x_1+p_2x_2=m$。假定税后需求束为$(x_1*,x_2*)$，则税收收入为 $tx_1*$。在总付税下使税收收入等于产品税下的税收收入，即 T= $tx_1*$，这时的预算约束为 $p_1x_1+p_2x_2=m- tx_1*$。两条预算线必在点$(x_1*,x_2*)$处相交。只要不是里昂惕夫偏好，两种税后的选择是不同的，假定总付税下的选择为 x**，则必有 x**优于 x*，因为 x*是总付税下可行的选择。x**不可能位于 x*的左边，因为如果这样就违背了显示偏好公理。

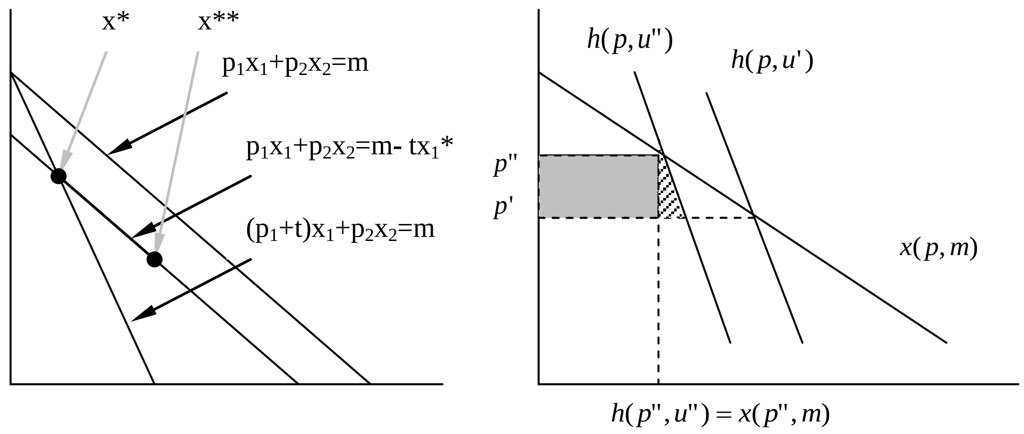



图 10.3　产品税与一次性总付税对消费者的不同影响

**解法 2　利用等价变动**

政府对产品 1 征税，税率为 t，使其价格从 $p_1'$ 上涨到 $p_1''=p_1'+t$，政府得到的税收为

$tx_1(p'',m)$, 其中$p''=(p_1+t,\cdots,p_n)$。考虑消费者的福利损失，用等价变动衡量：

$$
\begin{aligned}
EV &= \mu(p';p'',m)-\mu(p';p',m)\\
&= \mu(p';p'',m)-\mu(p'';p'',m)\\
&= e(p',v(p'',m))-e(p'',v(p'',m))\\
&= e(p',u'')-e(p'',u'')\\
&= \int_{p''}^{p'} h(p,u'')dp
\end{aligned}
$$

在图像上表现为沿着参数为 *u''*的希克斯需求曲线的积分，图 10.3 中的二个阴影部份的面积。考虑一次性总付税，总税收为 T，令$T=tx_1(p'',m)$。考虑政府利用一次性总付税得到同样多的税收收入的条件下对消费者的福利影响，用等价变动度量就是$-T=-tx(p'',m)$。考虑恒等式$x(p'',m)\equiv h(p'',v(p'',m))\equiv h(p'',u'')$，所以消费者的福利损失是图中的长方形阴影面积。

# 第十一章　不确定性



## 第四节　预期效用

预期值：

$E\tilde{w}$ 各种可能结果下的财富（或收入或收益率等）的加权平均，其权数为各种结果发生的概率。

$$E\tilde{w} = \sum \pi_i w_i \quad \sum \pi_i = 1$$

$$E\tilde{w} = \int_{-\infty}^{\infty} wf(w)dw \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(w)dw = 1$$

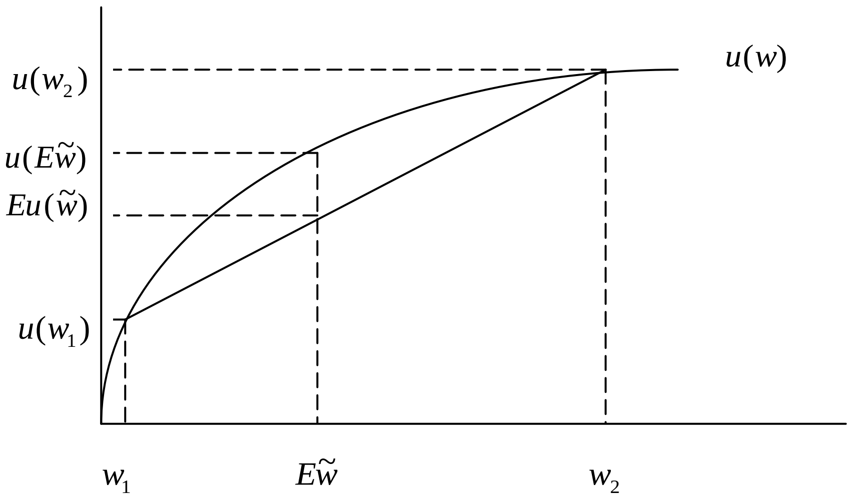
预期值效用：$u(E\tilde{w})$ 预期值对应的效用水平

预期效用：各种可能结果下的效用水平的加权平均，其权数就是各种结果发生的概率。

$$Eu(\tilde{w}) = \sum \pi_i u(w_i) \quad \sum \pi_i = 1$$

$$Eu(\tilde{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(w)f(w)dw \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(w)dw = 1$$

图示




消费者目标

## 第五节　风险规避

**一、风险态度**

**二、风险规避的各种描述**

- 预期效用小于预期值效用

$$u(tw'+(1-t)w'')\geq tu(w')+(1-t)u(w'')$$
$$u(50)\geq 0.5\times u(100)+0.5u(0)$$

- 预期效用函数为凹函数
- 边际效用递减
- 风险规避度大于 0
- 风险金大于 0

**三、阿罗・普拉特绝对风险规避度（风险规避程度的一种度量）**

$r(w)=-u''(w)/u'(w)$

合理性证明如下：赌博（p,1-p: x,y）参与和不参与元差异

$$pu(w+x)+(1-p)u(w+y)=u(w)$$

对 x 微分：$pu'(w+x)+(1-p)u'(w+y)y'(x)=0$

在点（0，0）有 $y'(x)=-\dfrac{p}{1-p}$

再对 x 微分：$pu''(w+x)+(1-p)u''(w+y)[y'(x)]^2+(1-p)u'(x+y)y''(x)=0$

在点（0，0）有：$y''(x)=-\dfrac{p}{1-p}\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$

## 第六节　全局风险规避

**一、全部风险规避描述**

A 比 B 更避险意味着

描述 1：A 的风险规避度更大，$r_A(w)>r_B(w)$；或者

描述 2：A 的效用函数更凹，$A(w)=G(B(w)),G(.)$ 为严格递增严格凹函数；或者

描述 3：A 的风险金更大，$\pi_A(\varepsilon)>\pi_B(\varepsilon),\varepsilon$ 为任一 0 均值随机变量。

**二、确定性等价与风险金**

1、 等价性确定：$u(\ddot{w})=Eu(\tilde{w})$。

2、 风险金：$\pi(\tilde{w})=E\tilde{w}-\ddot{w}$

**三、詹森不等式**

若 $f(x)$ 是一严格凹函数，则有：$Ef(\tilde{x})<f(E\tilde{x})$

**四、普拉特定理**

若 $A(.)$ 和 $B(.)$ 是两个严格递增的、严格凹的连续函数，则全部风险规避的三种描述等价。

- 证明描述 1 成立意味着描述 2 成立。

$$A'=G'B'$$
$$A''=G''[B']^2+G'B''$$
$$\frac{A''}{A'}=\frac{G''}{G'}B'+\frac{B''}{B'}$$
$$\frac{G''}{G'}B'=\frac{A''}{A'}-\frac{B''}{B'}<0$$

最后的不等式是由于描述 1。

- 证明描述 2 成立意味着描述 3 成立

$$u(\ddot{w}) = Eu(\tilde{w})$$

$$\begin{aligned} A(\ddot{w}_A) &= EA(\tilde{w}) \\ &= EG(B(\tilde{w})) \\ &< G(EB(\tilde{w})) \\ &= G(B(\ddot{w}_B)) \\ &= A(\ddot{w}_B) \end{aligned}$$

$$\ddot{w}_A < \ddot{w}_B \Rightarrow \pi_A(w) > \pi_B(w)$$

- 证明描述 3 成立意味着描述 1 成立

  固定 0 均值随机变量$\varepsilon$，考虑随机变量束$t\varepsilon, (0 \le t \le 1)$。定义风险金：

  $u(w-\pi(t)) = Eu(w+t\varepsilon)$，

  将$\pi(t)$在 t 等于 0 的附近泰勒展开：

  $$\pi(t) \approx \pi(0) + \pi'(0)t + \frac{1}{2}\pi''(0)t^2$$

  先求$\pi(0)$。据定义得到$\pi(0) = 0$.

  再求$\pi'(0)$。据定义式求导得：

  $-u'(w-\pi(t))\pi'(t) = Eu'(w+t\varepsilon)\varepsilon$

  当 t=0 时得到$\pi'(0) = 0$

  最后求$\pi''(0)$。再求一次导得：

  $$u''(w-\pi(t))[\pi'(t)]^2 - u'(w-\pi(t))\pi''(t) = Eu''(w+t\varepsilon)\varepsilon^2$$

  在 t=0 时得到：$\pi''(0) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}\sigma^2$

  将计算结果代入泰勒展开式最后得到：

  $$\pi(t) \approx \frac{1}{2} r(w)(t\sigma)^2$$

  上式说明，对于给定的赌博，风险金大，风险规避度也大，即表述 3 成立意味着表述 1 成立。

  注：上式常用来近似计算风险金，但要注意：

  1、$\pi(t)$描述的是$t\varepsilon$的风险金；

  2、$\varepsilon$必须是 0 均值；

  3、必须是小赌博。

例子：资产定价

$$\max_x Eu(\tilde{w}) = Eu(\sum_0 x_i w\tilde{R}_i) \qquad s.t. \sum x_i = 1$$

$$\begin{cases} wE[u'(\tilde{w})\tilde{R}_i] = \lambda \\ wE[u'(\tilde{w})R_0] = \lambda \end{cases}$$

$$R_0 Eu'(\tilde{w}) = E[u'(\tilde{w})\tilde{R}_i] = Eu'(\tilde{w})E\tilde{R}_i + \mathrm{cov}(u'(\tilde{w}), \tilde{R}_i)$$

$$\overline{R}_i = R_0 - \frac{\mathrm{cov}(u'(\tilde{w}), \tilde{R}_i)}{Eu'(\tilde{w})}$$

## 第七节、相对风险规避

### 一、相对风险规避度

$$\rho(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} w$$

**二、含义**

若 $\rho'(w)=0$，则为不变的相对风险规避，意味着随着财富的增加，风险资产投资占总财富的比例保持不变。

三、合理性证明提示

$$pu(xw)+(1-p)u(yw)=u(w)$$

## 第八节　均值方差效用

**一、均值方差效用函数**

$u(w,\sigma)$，其中 $w$ 为资产组合的均值，$\sigma$ 为资产组合的标准差。

**二、风险态度**

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}\begin{cases}<0 & \text{风险规避}\\ =0 & \text{风险中性}\\ >0 & \text{风险爱好}\end{cases}$$

**三，风险规避度与边际补偿率**

边际补偿率．增加一单位风险所要求补偿的均值的数量．它等于无差异线的斜率。

$$\frac{dw}{d\sigma} = -\frac{\partial u/\partial\sigma}{\partial u/\partial w}$$

边际补偿率大，风险规避度高。

边际补偿率递增意味着无差异线是凸的。

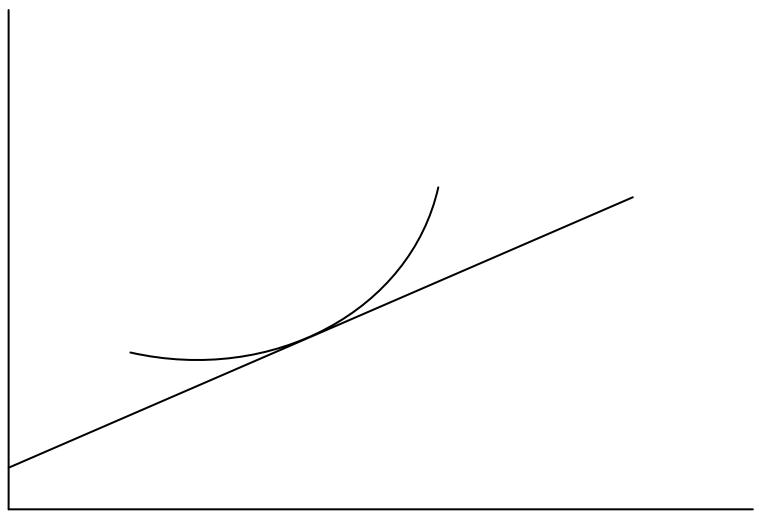
**四、市场约束**

$$w = w^0 + a\sigma$$

## 五、消费者选择

$$\max u(r,\sigma) \qquad s.t.\quad r = r_0 + a\sigma$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{\partial u(r^*,\sigma^*)/\partial\sigma}{\partial u(r^*,\sigma^*)/\partial r} \\ r^* = r_0 + a\sigma^* \end{cases}$$



**六、均值方差效用与预期效用**

1、一般情况下两者不一致，二次效用函数或正态分布下两者一致。

2、理论分析一般用预期效用论，实践中一般用均值方差效用。

例子：不变风险规避加正态分布

$$Eu(\tilde{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(w) f(w) dw$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aw} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{w-\overline{w}}{\sigma})^2} dw$$

$$= -e^{-a(\overline{w}-\frac{1}{2}a\sigma^2)}$$

$$= u(\overline{w}, \sigma)$$

另外，在不变风险规避且财富正态分布情况下，效用函数可设定为：

$u(\overline{w}, \sigma) = \overline{w} - \frac{1}{2}a\sigma^2$，即效用水平为确定性等价。

例子：风险分散

两种不相关资产的报酬率相同但方差不同，即 $r_1 = r_2 = r, \sigma_1 = 2\sigma_2, \mathrm{cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_1) = 0$，应该如何进行资产组合？

$$\tilde{r} = x\tilde{r}_1 + (1-x)\tilde{r}_2$$

$$\sigma^2 = x^2{\sigma_1}^2 + (1-x)^2{\sigma_2}^2 = 4x^2{\sigma_2}^2 + (1-x)^2{\sigma_2}^2$$

$$\max_x 4x^2{\sigma_2}^2 + (1-x)^2{\sigma_2}^2$$

$$8x - 2(1-x) = 0$$

$$x = 1/5$$

## 第九节　主观概率理论

**研究对象**

后验概率的形成问题。

主观概率包括先验与后验概率，先验概率是事前形成的，后验概率是观察到事件发生后，通过调整先验概率而形成的。

**后验概率形成的形式化**

$$p(H|E)=\frac{p(E|H)p(H)}{p(E)}$$

以上四个概率的含义依次为：

- 观察到事件 E 发生后认为 H 为真的后验概率；
- H 为真条件下事件 E 发生的概率；
- H 为真的先验概率；
- 事件 E 发生的概率。

※　例子：人品的判断

给定你认为某人是好人的先验概率为 0.5。

1、发现他做了一件好事，好人做这件好事的概率为 p，坏人一定不做。

$$p(H|E)=\frac{p(E|H)p(H)}{p(E)}=\frac{0.5p}{0.5p+0.5\times 0}=1$$

2、好人与坏人都会做这件好事，但好人做的概率更大。

$$p(H|E)=\frac{0.5p_1}{0.5p_1+0.5p_2}>0.5$$

# 第 13 章　竞争市场



## 第一节　竞争均衡

一、厂商均衡

$$\max\ py - c(y)$$
$$p = c'(y^*)$$
$$y^* = y(p)$$

供给函数的二阶条件与停业条件

$c''(y) > 0$，　$p > AVC$

二、厂商均衡的变动

$$p = c'(y(p))$$
$$1 = c''(y^*)y'(p)$$
$$y'(p) = 1/c'' > 0$$

三、行业供给

$$Y(p) = \sum y_i(p)$$

四、市场均衡

$$\sum_i^n x_i(p) = \sum_j^m y_j(p)$$
$$X(p) = Y(p)$$

五、市场均衡的变动

—消费者进入与厂商进入

$$nx(p) = my(p)$$
$$p^* = p(n,m)$$
$$nx(p(n,m)) = my(p(n,m))$$

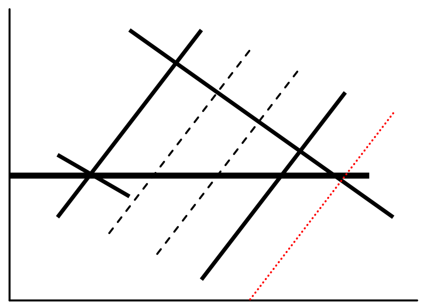
消费者进入

$$x + nx'\frac{\partial p(n,m)}{\partial n} = my'\frac{\partial p(n,m)}{\partial n}$$
$$\frac{\partial p(n,m)}{\partial n} = \frac{x}{my' - nx'} > 0$$

厂商进入

$$nx'\frac{\partial p(n,m)}{\partial m}=y+my'\frac{\partial p(n,m)}{\partial m}$$

$$\frac{\partial p(n,m)}{\partial m}=-\frac{y}{my'-nx'}<0$$



## 第二节　竞争与福利

为了方便，假定为拟线性偏好

一、竞争

讨论在分散决策下的结果

消费者均衡

$$\max u(x)+y,\quad s.t.\ \ y+px=m$$

$$p=u'(x)$$

生产者均衡

$$\max\ px-c(x)$$

$$p=c'(x)$$

市场均衡

$$u'(x)=c'(x)$$

二、社会福利最大化

讨论社会计划者在社会总资源与生产技术约束追求社会福利最大化

$$\max u(x)+y,\quad y+c(x)=w$$

$$u'(x)=c'(x)$$

注：1、$u(x)+y=U(x,y)$ 为社会无差

异线， $y+c(x)=w$ 为生产可能性线。

2、社会福利函数可直接选定为效用

与成本之差或者总剩余。

## 第三节　福利与效率

假定产品已经生产出来，考虑纯交换。

一、福利最大化

一般情况

$$\max_x U(U_1(x_1),U_2(x_2)),\ s.t.\ \ \dots$$

拟线性偏好、无加权

$$\max u_1(x_1)+y_1+u_2(x_2)+y_2$$
$$s.t.\ x_2=\bar{x}-x_1,\ \ y_2=\bar{y}-y_1$$

$$\max u_1(x_1)+u_2(\bar{x}-x_1)+\bar{y}$$
$$u_1'(x_1)=u_2'(x_2)$$

三、帕累托效率

考察帕累托最优所要求的条件。

如果在给定一个人的效用水平的条件下使另一个人的效用水平达到了最大，就达到了交换的帕累托最优，因为这时已经无法再进行帕累托改进。

$$\max u(x_1)+y_1$$
$$s.t.\ x_1+x_2=\bar{x}$$
$$y_1+y_2=\bar{y}$$
$$u(x_2)+y_2=\bar{u}$$

$$\max u(x_1)+y_1$$
$$y_1=\bar{y}-y_2$$
$$=\bar{y}-\bar{u}+u(\bar{x}-x_1)$$
$$\max u(x_1)+\bar{y}-\bar{u}+u(\bar{x}-x_1)$$

$$u_1'(x_1)=u_2'(x_2)$$

注：福利最大化的解有无穷多个，对应该着交换契约线；帕累托效率的解是唯一的，对应着契约线上的一个点。

## 第四节　离散商品模型

定义保留价格$:u\ \ (1,m-r)=u(0,m)$

在拟线性偏好下$u(1)+m-r=u(0)+m$

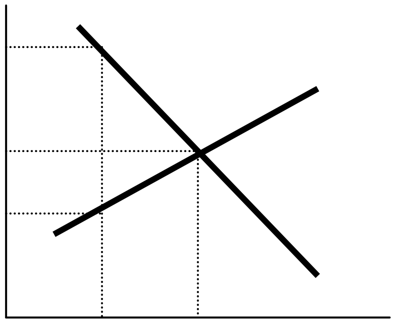
即$r=u(1)$

边际内消费者$r>p$购买获得剩余

$s=r-p$。

## 第五节　税收与补贴（从量税）

一、税负与效率损失图示



$p_d = p_s + t$

二、税负的数学分析

$$x(p+t) = y(p)$$

$$x(p(t)+t) \equiv y(p(t))$$

$$x'(p'(t)+1) = y'p'(t)$$

$$p'(t) = x'/(y'-x')$$

在税前原均衡点处有 $t=0$,所以：

$$p'(0) = \frac{x'(p(0))}{y'(p(0)) - x'(p(0))}$$

$$= \frac{x'(p_0) \times p_0 / x_0}{y'(p_0) \times p_0 / y_0 - x'(p_0) \times p_0 / x_0}$$

$$= -\frac{e_d}{e_s + e_d}$$

上式表示，在开征税收之时，税收增加一元线生产者收到的价格降低的数量，即生产者负担的税收的比例。

$$p_d(t) = p(t) + t$$

$$p_d'(t) = p'(t) + 1$$

$$p_d'(0) = p'(0) + 1$$

$$= \frac{e_s}{e_x + e_d}$$

三、福利损失的数学分析

$$p_d = p_s + t$$

$$p_d(x) = p_s(y) + t$$

$$x = y = q$$

$$p_d(q) = p_s(q) + t$$

$$p_d(q(t)) \equiv p_s(q(t)) + t$$

$$p_d'(q)q'(t) = p_s'(q)q'(t) + 1$$

$$q'(t) = -\frac{1}{p_s'(q) - p_d'(q)}$$

当 t=0 时， $p_d = p_s = p_0, q = q_0$，

所以：

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{q_0}{p_0}\frac{1}{[p_s'(q_0) - p_d'(q_0)]q_0 / p_0}$$

$$= -\frac{q_0}{p_0}\left.\frac{e_s e_d}{e_s + e_d}\right|_{t=0}$$

上式表明，在开征点，税收增加一单位所引起的产量的下降数量，即税收引起的效率损失。

$$\Delta q \approx \frac{dq(0)}{dt}\Delta t$$

$$\approx \frac{dq(0)}{dt}t$$

$$\Delta TS \approx \frac{1}{2}\Delta q \times t$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dq(0)}{dt}t^2$$

$$= -\frac{1}{2}p_0 q_0\left(\frac{t}{p_0}\right)^2\frac{e_s^0 e_d^0}{e_s^0 + e_d^0}$$

损失－税收比例约为

$$\frac{|\Delta TS|}{tq_0} = \frac{1}{2}\frac{t}{p_0}\frac{e_s^0 e_d^0}{e_s^0 + e_d^0}$$

弹性越小，损失－税收比例越大。

## 第六节　最优税收

问题：政府需要以产品税的方式筹集既定的资金 R，应该如何对各种产品征税使福利损失最小。

考虑代表性消费者，政府选择各种产品和税率向量 t 以使代表性消费者的间接效用最大化，即：

$$\max_t v(p+t, m)$$

$$s.t. \quad tx(p+t, m) = R$$

一阶条件为

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} - \mu x_i - \mu\sum_j t_j\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = 0$$

应用罗伊等式得

$$-\lambda x_i-\mu x_i-\mu\sum_j t_j\frac{\partial x_j}{\partial p_i}=0$$

其中 λ 为消费者效用最大化问题的拉格朗日乘子。整理后得

$$\begin{aligned}x_i&=-\frac{\mu}{\mu+\lambda}\sum_j t_j\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\\&=-\frac{\mu}{\mu+\lambda}\sum_j t_j\left(\frac{\partial h_j}{\partial p_i}-\frac{\partial x_j}{\partial m}x_i\right)\end{aligned}$$

解出 $x_i$ 得

$$\theta x_i=\sum_j t_j\frac{\partial h_j}{\partial p_i}$$

θ 与 ij 无关。由于交叉价格效应对称，所以

$$\theta x_i=\sum_j t_j\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$$

其弹性形式是

$$\theta=\sum_j\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}\frac{t_j}{p_j}=\sum_j\varepsilon_{ij}\frac{t_j}{p_j}$$

如果任意两种商品之间的希克斯交叉弹性为零，那么

$$\frac{t_i}{p_i}=\frac{\theta}{\varepsilon_{ii}}$$

逆弹性法则或拉姆齐赋税法则：对弹性最小的商品课以最重的税收。

另外，当很小时 t=dp，所以

$$h_i=h_i(p+t,u)$$

$$dh_i\approx\sum_j\frac{\partial h_i}{\partial p_j}t_j$$

$$\frac{dh_i}{h_i}\approx\frac{1}{\theta}$$

小税收的最优设定将按同一比例降低补偿需求。

# 第十四章　垄断



## 第一节　利润最大化

一、一般情况

$$\max p(y)y-c(y)$$

一阶条件：

$$p'(y^*)y+p(y^*)-c'(y^*)=0$$，或者

$$p(y^*)(1-1/e(y^*))=c'(y^*)$$

二阶条件：

$$R'(y^*)<c'(y^*)$$

二、特殊情况

1、线性需求：常边际成本

$$p(y)=a-by, c(y)=cy$$

$$\max (a-by)y-cy$$

$$y^*=(a-c)/2b$$

$$p^*=(a+c)/2$$

2、常弹性、常边际成本

$$e(y)=e, c(y)=cy$$

$$p^*(1-1/e)=c$$

$$p^*=ce/(e-1)$$

## 第二节　比较静态（常边际成本）

一、一般需求

$$\max R(y)-cy$$

$$R'(y^*)=c$$

$$y^*=y(c)$$

$$p^*=p(y^*)=p(y(c))$$

$$R'(y(c))\equiv c$$

$$R''(y^*)y'(c)=1$$
$$y'(c)=1/R''<0$$
$$dp^*/dc=p'(y^*)y'(c)>0$$

二、线性需求

$$p(y)=a-by$$

$$p^*=(a+c)/2$$
$$dp^*/dc=1/2$$

三、常弹性需求

$$p^*=ec/(e-1)$$
$$dp^*/dc=e/(e-1)$$

## 第三节、福利与产量

一、福利最大化

$$\max w(x)=u(x)-c(x)$$
$$w'(\bar{x})=u'(\bar{x})-c'(\bar{x})=0,\text{或}$$

$p(\bar{x})=c'(\bar{x})$,即在社会最优产量处，需求线与边际成本线相交。

二、垄断利润最大化

$$\max \pi(x)=p(x)x-c(x)$$
$$\pi'(x^*)=p'(x^*)x^*+p(x^*)-c'(x^*)=0 \text{ 或者}$$
$$\pi'(x^*)=R'(x^*)-c'(x^*)=0$$

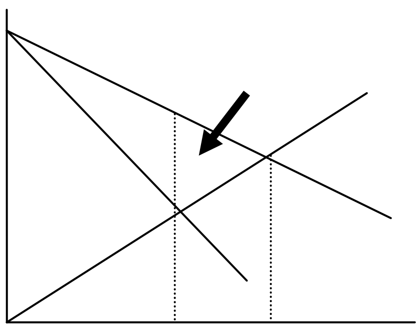
即在垄断利润最大处,边际收益线与边际成本线相交。

二、垄断造成的福利损失

$$\begin{aligned} w'(x^*)&=u'(x^*)-c'(x^*)\\ &=p(x^*)-c'(x^*)\\ &=-p'(x^*)x^*>0 \end{aligned}$$

$w'(x^*)>0$ 说明，在垄断产量处增加生产可以增加社会福利，即垄断产量偏低。垄断造成的福利损失可计算如下：

$$\begin{aligned} \text{损失}&=w(\bar{x})-w(x^*)\\ &=\int_0^{\bar{x}} w'(x)dx-\int_0^{x^*} w'(x)dx\\ &=\int_{x^*}^{\bar{x}} w'(x)dx\\ &=\int_{x^*}^{\bar{x}} (p(x)-c'(x))dx \end{aligned}$$



## 第四节　质量选择

一、垄断质量选择原则

$$\max p(x,q)x - c(x,q)$$

$$\begin{cases} \partial R(x^*,q^*)/\partial x = \partial c(x^*,q^*)/\partial x \\ \partial R(x^*,q^*)/\partial q = \partial c(x^*,q^*)/\partial q \end{cases}$$

产量边际收益等于产量的边际成本；质量边际收益等于质量的边际成本。

二、福利分析

$$\max s(x,q) + \pi(x,q)$$

$$\frac{\partial s(x,q)}{\partial q} + \frac{\partial \pi(x,q)}{\partial q} = 0$$

垄断者均衡时，第二项为零，所以在垄断者均衡时福利最大化要求 $\frac{\partial s(x^*,q^*)}{\partial q} = 0,$

这一点很难保证。如果 $\frac{\partial s(x^*,q^*)}{\partial q} > 0,$ 则 $\frac{\partial w(x^*,q^*)}{\partial q} > 0,$ 提高质量可以增进福利。

从图象上看，在垄断产量处，如果随着质量的提高，需求线变陡，则有 $\frac{\partial s(x^*,q^*)}{\partial q} > 0$ 和 $\frac{\partial w(x^*,q^*)}{\partial q} > 0,$ 提高质量可以增进福利，这说明垄断质量偏低。随着质量的提高，需求线变陡意味着 $\frac{\partial^2 p(x^*,q^*)}{\partial x \partial q} < 0$

## 第五节　价格歧视

## 第六节　第一类价格歧视

表述一、据购买总量索取消费者能够接受的最高费用。

$$\max R(x) - c(x)$$
$$s.t.\ R(x) = u(x)$$
$$u'(x^*) = c'(x^*)$$
$$R^* = u(x^*)$$

表述二、对每一单位商品索取的价格等于消费者的保留价格。

$$p_i = u(i) - u(i-1)$$

$$\begin{aligned} u(0) + m &= u(1) + m - p_1 \\ &= u(2) + m - p_1 - p_2 \\ &\vdots \\ &= u(n) + m - p_1 - \cdots - p_n \end{aligned}$$

$$\sum p_i = u(n)$$

## 第七节　第二类价格歧视

一、概念：打包定价。小包单价高，大包单价低。

二、单交叉性假定：$u_2'(x) > u_1'(x)$

- 推论 1：$p_2(x) > p_1(x)$
- 推论 2：$u_2(x) > u_1(x)$
- 推论 3：两人的无差异线至多相交一次

$$u(x) + y(x) = \bar{u}$$
$$-y'(x) = u'(x)$$

由于在任何 $x$ 处，高需求者的边际效用较大，所以在任一 $x$ 处无差异线较陡

三、约束条件

$$\text{参与约束:}\begin{cases} u_1(x_1) \ge r_1 \\ u_2(x_2) \ge r_2 \end{cases}$$

$$\text{自偏好约束}\begin{cases} u_1(x_1) - r_1 \ge u_1(x_2) - r_2 \\ u_2(x_2) - r_2 \ge u_2(x_1) - r_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 \le u_1(x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ r_1 \le u_1(x_1) + r_2 - u_1(x_2) \cdots\cdots (2) \\ r_2 \le u_2(x_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3) \\ r_2 \le u_2(x_2) + r_1 - u_2(x_1) \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

由于（3）式与（4）式只能有一个约束起作用，且由于单交叉性使得（4）式右端小于（3）式右端，所以只有（4）式是有约束力的。另外，为使利润最大，（4）式可取等式。

$$r_2 = u_2(x_2) + r_1 - u_2(x_1) \cdots\cdots (5)$$

（1）、（2）两式必有且只有一个等式成立。下面假定（2）式的等式成立且试图推出矛盾。

$$u_1(x_2) - u_1(x_1) = r_2 - r_1$$
$$= u_2(x_2) - u_2(x_1)$$
$$\int_{x1}^{x2} u_1'(x)dx = \int_{x1}^{x2} u_2'(x)dx$$
$$u_1'(x) = u_2'(x)$$

与单交叉性假定矛盾。起作用的约束条件为：

$$\begin{cases} r_1 = u_1(x_1) \\ r_2 = u_2(x_2) + r_1 - u_2(x_1) \end{cases}$$

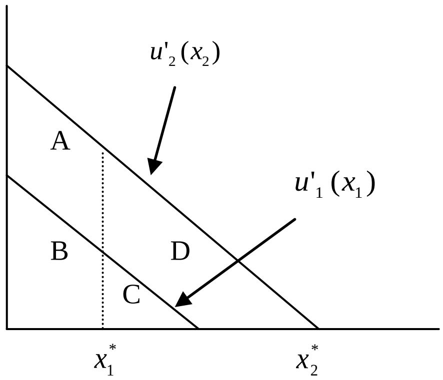
四、利润最大化

$$\max r_1 + r_2 - c(x_1 + x_2)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} r_1 = u_1(x_1) \\ r_2 = u_2(x_2) + r_1 - u_2(x_1) \end{cases}$$

$$\max 2u_1(x_1) + u_2(x_2) - u_2(x_1) - c(x)$$
$$u_2'(x_2*) = c'(x*)$$
$$u_1'(x_1*) = \frac{1}{2}(u_2'(x_1*) + c'(x*))$$

$$\begin{cases} r_1* = u_1(x_1*) \\ r_2 = u_2(x_2*) + r_1* - u_2(x_1*) \end{cases}$$




五、图示。设成本为零。

$$u_2'(x_2*) = 0$$
$$u_1'(x_1*) = \frac{1}{2}u_2'(x_1*)$$

$$\begin{cases} r_1* = u_1(x_1*) = B \\ r_2* = u_2(x_2*) + r_1* - u_2(x_1*) \\ \quad = B + C + D \end{cases}$$

**例子**：设成本为零，且

$$u_1 = 3x_1 - x^2{}_1/2, \qquad u_2 = 4x_2 - x_2{}^2/2$$

$$x_2* = 4$$
$$x_1* = 2$$
$$r_1* = 4$$
$$r_2* = 6$$

## 第八节　第三类价格歧视

一、概念

二、歧视价格的决定

$$\max p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2 - cx_1 - cx_2$$

$$\begin{cases} p_1(1-1/e_1) = c \\ p_2(1-1/e_2) = c \end{cases} \qquad \frac{p_1(1-1/e_1)}{p_2(1-1/e_2)} = 1$$

三、福利分析。考虑从无歧视定价变到歧视定价时的福利变化。

$$w = u(x_1, x_2) - cx_1 - cx_2$$
$$\Delta w = \Delta u - c\Delta x_1 - c\Delta x_2$$
$$u(x') \le u(x'') - \frac{\partial u(x'')}{\partial x_1}\Delta x_1 - \frac{\partial u(x'')}{\partial x_2}\Delta x_2$$
$$u(x'') \le u(x') + \frac{\partial u(x')}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x')}{\partial x_2}\Delta x_2$$
$$\frac{\partial u(x'')}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x'')}{\partial x_2}\Delta x_2 \le \Delta u \le \frac{\partial u(x')}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u(x')}{\partial x_2}\Delta x_2$$
$$p_1''\Delta x_1 + p_2''\Delta x_2 \le \Delta u \le p_1'\Delta x_1 + p_2'\Delta x_2$$
$$p_1''\Delta x_1 + p_2''\Delta x_2 \le \Delta u \le p'(\Delta x_1 + \Delta x_2)$$
$$(p_1''-c)\Delta x_1 + (p_2''-c)\Delta x_2 \le \Delta w \le (p'-c)\Delta x$$

左端为零福利定增，右端为零福利定降。

1、 歧视后总产销量不增加，福利一定下降。（因右端为 0）

2、如果不歧视就不向低弹性市场低需求市场提供产品，歧视一定提供产品，则歧视一定增加福利（因左端为正）。$\Delta x_2 = 0, \Delta x_1 > 0$

# 第十五章　博弈论



## 第一节　完全信息静态博弈

一、几个基本概念

参与人

战略与行动

支付

共同知识与私人知识

二、什么是…

完全信息：没有事前的不确定性或

参与人的类型为共同知识。

静态：同时行动且博弈一次

三、纳什均衡

给定其他人的战略，任一人的战略都是最优的，这些最优的战略组合叫纳什均衡。

对于任一 $i$，有

$u_i(s_i*, s_{-i}*) \geq u_i(s_i, s_{-i}*)$，则

$(s_1*, s_2*, \cdots, s_n*)$ 为纳什均衡。

例子：囚徒困境

四、求解纳什均衡的方法（离散型）

1、 上策法

2、 下策法（智猪博弈）

3、 划线法（性别战）

4、 箭头法（守卫与小偷）

五、混合战略纳什均衡

| | 守 | 睡 |
|---|---|---|
| 偷 | -5，1 | 5,，-2 |
| 不 | 0，-1 | 0，0 |

六、连续型纳什均衡求解方法

## 第二节　完全信息动态博弈
## ———（序列博弈）

一、子博弈完美纳什均衡

要求：1、每个子博弈都是纳什均衡

2、非均衡路径上也是纳什均衡

二、逆向归纳法

- 例子：性别战
- 例子：讨价还价模型

1、有限期

$$A\begin{cases}7/9- \\ \to B\begin{cases}7/9,2/9 \\ \to A\begin{cases}4/9+,2/9- \\ B\to 4/9,0\end{cases}\end{cases} \\ 7/9+\end{cases}$$

2、无限期

第三天 A 出价，自己得 x：

第二天 B 出价，给 A 数量 ax，自己得 1-ax；

第一天 A 出价，给 B 数量 b(1-ax),自己得到 1-b(1-ax)

令 x=1-b(1-ax)

x=(1-b)/(1-ab)

讨论耐心优势与先动优势。

耐心优势：

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{1-b}{(1-ab)^2}b>0$$

$$\frac{\partial x}{\partial b}=\frac{-(1-ab)+a(1-b)}{(1-ab)^2}$$

$$=-\frac{1-a}{(1-ab)^2}<0$$

先动优势：

$$x=\frac{1}{1+a}\geq\frac{1}{2}$$

- 连续型求解方法

1、给定先动者行动（或战略），后动者选择自己的战略以使自己的支付最大化。从而得到最优反应战略，即反应函数。

2、给定后动者的反应函数，选择自己的战略或行动，使自己支付最大化。

3、将先动者的均衡行动代入后动者的反应函数，得到后动者均衡行动。

## 第三节　不完全信息静态博弈

一、不完全信息

参与人的类型是私人知识，其它人不知道，仅仅知道类型的概率分布。

参与人的类型主要指其支付函数。

二、贝叶斯纳什均衡及其求解

给定其他人类型的概率分布，每一参与人选择自己的战略，使期望支付最大化。

例子：一级密封投标

两人都不知道对方的评价 v，只知道在区间[0,1]上均匀分布，求报价 b。

给定自己的评价 v，自己的报价 b 是自己评价的函数：b=b(v),其反函数:v=v(b)。

给定自己的报价 b，自己中标的概率为 p(b>b’)

考虑对称博弈。两人的报价函数相同，因此有：p(b>b’)=p(v>v’)。

自己的评价 v 是已知的，自己的评价大于对方评价的概率就是 v（因为在区间[0,1]上均匀分布），因中标与否毕竟依赖于报价，所以中标的概率 v=v(b)。

一旦中标，支付为 v-b，因此期望支付为：(v-b)v(b)。

$$\max_b (v-b)v(b)$$
$$(v-b)v'(b)=v(b)$$
$$b^*=b(v)$$

上面进行的是静态分析，给定参数 v，求解最优报价 b*，下面进行比较静态分析，即考虑 v 变化时 b*如何变化的问题。如果能解出报价函数，这种比较静态分析更为直接。这相当于求解微分方程：

$$vdv=bdv+vdb$$
$$v^2/2=bv+c$$

代入端点条件当 v=0 时 b=0 得到 c=0，所以：

$$b^*=v/2$$

注：参与人数 n 时，每人中标的概率为$(v(b))^{n-1}$，每人最优报价为$b^*=\dfrac{n-1}{n}v$

## 第四节　不完全信息动态博弈

一、完美贝叶斯纳什均衡

二、常见模型

- 信号传递模型
- 信号甄别模型

例子：劳动力市场信号传递模型（Spence）

第一阶段：劳动者选择受教育程度以传递自己的智商信息。

第二阶段：厂商根据受教育程度与智商支付工资。

完全信息情况

| | | 中学 | 大学 | 研究生 |
|---|---|---|---|---|
| 上学成本 | 智者 | 1 | 3 | 6 |
| | 愚者 | 2 | 6 | 16 |
| 工资 | 智者 | 8 | 13 | 15 |
| | 愚者 | 4 | 6 | 7 |
| 支付 | 智者 | 7 | 10 | 9 |
| | 愚者 | 2 | 0 | -9 |

不完全信息、混同均衡不可能

| | | 中学 | 大学 | 研究生 |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 上学成本 | 智者 | 1 | 3 | 6 |
| | 愚者 | 2 | 6 | 16 |
| 工资 | 智者 | 8 | 9.5 | 15 |
| | 愚者 | 4 | 9.5 | 7 |
| 支付 | 智者 | 7 | 6.5 | 9 |
| | 愚者 | 2 | 3.5 | -9 |

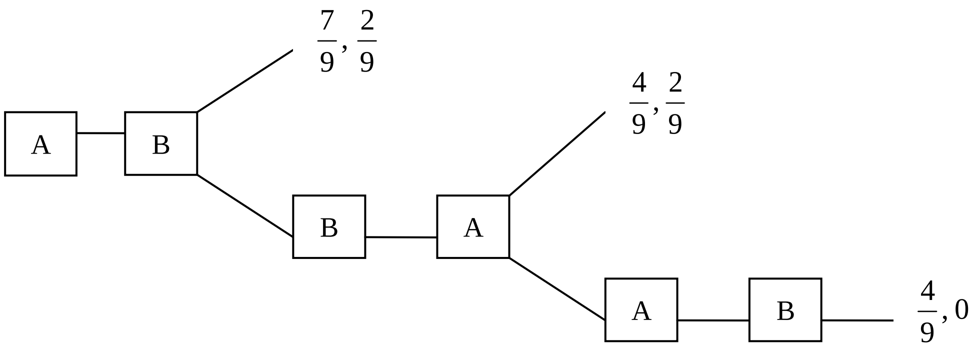
设一个不熟悉的人是智者的先验概率为 0.5，若智者仍选择大学，则愚者了选择大学混同。但这不是均衡。

不完全信息、分离均衡

| | | 中学 | 大学 | 研究生 |
|---|---|---|---|---|
| 上学成本 | 智者 | 1 | 3 | 6 |
| | 愚者 | 2 | 6 | 16 |
| 工资 | 智者 | 8 | 13 | 15 |
| | 愚者 | 4 | 6 | 7 |
| 支付 | 智者 | 7 | 10 | 9 |
| | 愚者 | 2 | 0 | -9 |

智者选择研究生教育，愚者模仿成本太高(16),且模仿后的预期工资（11）不高，支付为负（-5），不如选择中学，支付为 2。但智者为了传递自己是智者的信息已经付出了代价（1单位）。此为子博弈完美贝叶斯均衡。

## 第五节　主观概率理论



# 第十六章　寡头



## 第一节　双头古诺均衡

※　连续型纳什均衡的求解方法

1、找出支付函数

2、给定他人战略，求解自己的最优战略从而得到反应函数

3、联立各反应函数求解纳什均衡

**一、古诺均衡**

$$\max_{y1}\pi_1(y_1,y_2)=p(y)y_1-c_1(y_1)$$

$$\frac{\partial\pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1}=0$$

$$y_1{*}=f(y_2)$$

反应函数：$\begin{cases} y_1{*}=f(y_2{*}) \\ y_2{*}=g(y_1{*}) \end{cases}$

古诺纳什均衡：$(y_1{*},y_2{*})$

**二、反应曲线斜率：**

$$\frac{\partial\pi_1(f(y_2),y_2)}{\partial y_1}\equiv 0$$

$$\frac{\partial^2\pi_1(y_1,y_2)}{\partial {y_1}^2}f'(y_2)+\frac{\partial^2\pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1\partial y_2}=0$$

$$f'(y_2)=-\frac{\dfrac{\partial^2\pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1\partial y_2}}{\dfrac{\partial^2\pi_1(y_1,y_2)}{\partial {y_1}^2}}<0$$

**三、战略替代与战略互补**

战略替代：1、战略反向变动或

2、反应曲线负斜率或

3、利润函数的二阶交叉导数小于 0

**四、古诺均衡的稳定性条件：**

厂商 1 的反应线的斜率较小。即：

$$1/f'(y_2) < g'(y_1)$$

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 \pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1^{\ 2}}}{\dfrac{\partial^2 \pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}} < -\frac{\dfrac{\partial^2 \pi_2(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}}{\dfrac{\partial^2 \pi_2(y_1,y_2)}{\partial y_2^{\ 2}}}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 \pi_1(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 \pi_2(y_1,y_2)}{\partial y_2^{\ 2}} \end{vmatrix} > 0$$

## 第二节　比较静态

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1(y_1(a), y_2(a), a)}{\partial y_1} \equiv 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2(y_1(a), y_2(a),)}{\partial y_2} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^{\ 2}} y_1'(a) + \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} y_2'(a) + \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_1 \partial y_2} y_1'(a) + \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^{\ 2}} y_2'(a) + \quad 0 \quad = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^{\ 2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'(a) \\ y_2'(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1'(a) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} \\ 0 & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^{\ 2}} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1^{\ 2}} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 \pi_2}{\partial y_2^{\ 2}} \end{vmatrix}$$

$$\sin g(y_1'(a)) = \sin g(\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a})$$

若 $a$ 为边际成本，则：

$$\max_{y1} \pi_1(y_1, y_2, a) = p(y)y_1 - ay_1$$
$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial a} = -1$$
$$y_1'(a) < 0$$

## 第三节 多头古诺均衡

一、利润最大化

$$\max p(y)y_i - c_i(y_i)$$
$$p(y)(1 - \frac{y_i / y}{e(y)}) = c_i'(y_i)$$

当市场份额为 1 时为垄断，趋于 0 时为竞争。

二、福利分析

- 考虑 n 个相同的古诺厂商竞争所形成的行业均衡条件。

$$p' y_i + p = c$$

n 个相同的条件相加得到：

$$p' y + np = nc$$

- 考虑一个厂商的目标函数是垄断利润与社会福利的加权平均时所实现的均衡条件。

$$\max \frac{1}{n}[p(y)y - cy] + \frac{n-1}{n}[u(y) - cy]$$
$$p' y + p - c + (n-1)(p - c) = 0$$
$$p' y + np = nc$$

- 比较后发现条件相同。这说明寡头产业实现的福利水平介于垄断与竞争之间。n 愈大愈接近竞争。

## 第四节 贝特兰模型
### ---同质产品、同时定价

一、完全信息、等边际成本
二、完全信息、异边际成本
三、不完全信息（c 为私人知识）
类似密封投标
四、消费者对价格的信息不充分

## 第五节 战略替代与战略互补（对偶）
### ---异质产品的同时定产与同时定价

## 第六节 产量领先（斯模型）
### ---同质产品、先后定产、完全信息

※ 连续型完美纳什均衡的求解方法

1、 后动者选择。将先动者战略当作参数，选择自己的战略使支付最佳最大化，从而得

到反应函数。

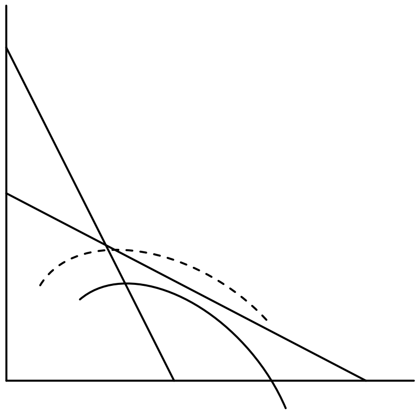
2、 先动者选择。在后动者反应函数的约束下选择战略，最大化自己的支付。

**一、追随者选择**

$$\max_{y2} \pi_2(y_1, y_2) = p(y)y_2 - c_2(y_2)$$

$$\frac{\partial \pi_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} = 0$$

$$y_2 = g(y_1)$$



**二、领导者选择**

$$\max_{y1} \pi_1(y_1, y_2) = p(y)y_1 - c_1(y_1)$$

$$s.t.\ y_2 = g(y_1)$$

或者：

$$\max_{y1} \pi_1(y_1, g(y_1)) = p(y)y_1 - c_1(y_1)$$

$$\frac{\partial \pi_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \frac{\partial \pi_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} g'(y_2) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 *$$

**三、反应曲线的图象推导**

定义厂商 1 的等利润曲线 $\overline{\pi}_1 = \pi_1(y_1, y_2)$，等利润线有如下性质：

性质 1：愈上的线代表的利润愈低，即 $\partial \pi_1 / \partial y_2 < 0$

性质 2：等利润曲线是凹的（否则无内解存在），证明如下。考虑等利润线顶点的二阶导数

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \pi_1}{\partial y_2} y_2'(y_1) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} y_2'(y_1)\right) + \left(\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial {y_2}^2} y_2'(y_1)\right) y_2'(y_1) + \frac{\partial \pi_1}{\partial y_2} y_2''(y_1) = 0$$

注意到等利润线顶点的一阶导数为零，厂商利润最大化的二阶条件以及性质 1，所以：

$$y_2''(y_1) = -\frac{\dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial {y_1}^2}}{\dfrac{\partial \pi_1}{\partial y_2}} < 0$$

反应线是无数条等利润线顶点组成的轨迹。

**四、偏好**

如果战略是替代的，则偏好领导，而非古诺，更非追随。

## 第七节　价格领先

**一、同质产品**

- 第二阶段追随者选择

  ---视价格为既定

$$\max py_2 - c(y_2)$$

$$p = c'(y_2) \Rightarrow y_2(p)$$

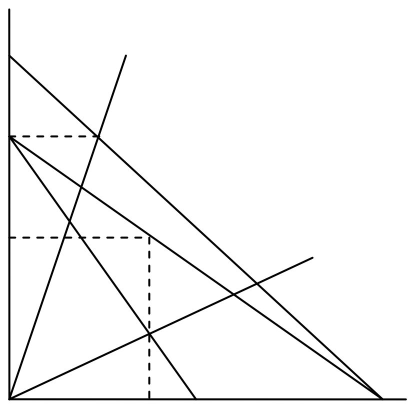
- 第一阶段领导者选择

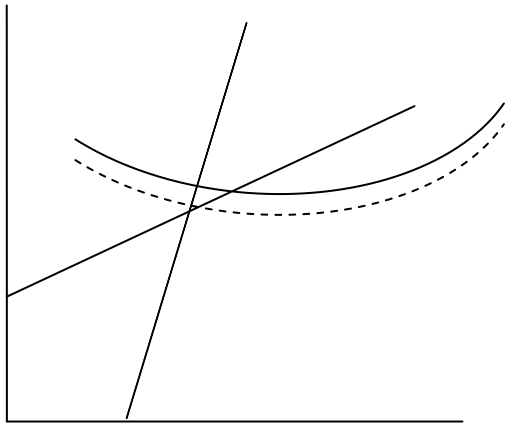
$$\max_p \; py_1(p) - c_1(y_1(p))$$
$$s.t.\; y_1(p) = y(p) - y_2(p)$$

$y_1(p)$ 为剩余需求曲线。或者

$$\max p(y_1)y_1 - c_1(y_1)$$
$$R_1'(y_1) = c_1'(y_1)$$

其中，$p(y_1)$ 为剩余需求曲线的反函数，$R'(y_1)$ 为剩余需求曲线下的边际收益或领导者的边际收益，而不是市场边际收益。





**二、异质产品**

- 追随者选择: $\max \pi_2(p_1, p_2)$ 得反应函数 $p_2 = g(p_1)$

- 领导者选择 $\max \pi_1(p_1, p_2)$, $s.t.\; p_2 = g(p_1)$. 或者, $\max \pi_1(p_1, g(p_1)) \Rightarrow p_1{}^*$

**三、偏好**

1、自偏好。如果战略是互补的，且有一个偏好于领导，则另一个必偏好于追随。（等利润曲线平坦的偏好领导，弯曲的偏好追随）
2、偏好追随。如果战略是互补的，且两厂商基本情况相同，则都偏好追随。（曲线形状差不多时）

注：同类异质产品产业先后定价比同时定价要好。

## 第十节　串谋

**一、利润最大化**

$$\max p(y)y - c_1(y_1) - c_2(y_2)$$
$$p'(y)y + p(y) = c_1'(y_1)$$
$$p'(y)y + p(y) = c_2'(y_2)$$

**二、瓜分市场**

**三、背叛的冲动(如果对方产量 $y_2$ 不变)**

$$
\begin{aligned}
&\pi_1 = p(y)y_1 - c_1(y_1)\\
&\partial\pi_1 / \partial y_1 = p' y_1 + p - c_1'\\
&\qquad\qquad = -p' y_2 > 0
\end{aligned}
$$

**四、对背叛的惩罚(我增产他也增产)**这时对方产量是自己产量的增函数

$$d\pi_1 / dy_1 = p'(1 + y_2'(y_1))y_1 + p - c_1'$$

若对方惩罚为你增产我也增产以保持市场份额不变，则有 $y_2'(y_1) = y_2 / y_1$, 这时：

$$
\begin{aligned}
d\pi_1 / dy_1 &= p'(1 + y_2'(y_1))y_1 + p - c_1'\\
&= p'(y_1 + y_2) + p - c_1'\\
&= p' y + p - c_1' = 0
\end{aligned}
$$

# 第十七章　交换



## 导言

**局部均衡与一般均衡**。是一对相对概念，但一般均衡常指交换、生产与产业结构。
**一般均衡与福利经济学**。实证与规范

## 第一节　分配空间

定义分配空间或分配集为可行的所有消费者的消费束的集合，即：

$$D(w)=\left\{x\,;\ \sum_i^n x_i=\sum_i^n w_i\right\} \tag{17.1}$$

其中，$x_i^{\,j}$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品消费量，$x_i$ 为 $i$ 的消费束，$x$ 为消费束组合；$w_i^{\,j}$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品初始禀赋，$w_i$ 为 $i$ 的禀赋束，$w$ 为禀赋束组合。即：

$$x=(x_i,\cdots,x_i),\ x_i=(x_i^{\,1},\cdots,x_i^{\,k}),\ w=(w_i,\cdots,w_i),\ w_i=(w_i^{\,1},\cdots,w_i^{\,k})$$

在 $2\times2$ 经济中，分配空间可以用艾奇沃斯盒状图来描述。

## 第二节　瓦尔拉斯均衡

定义：（$p$*,$x$*）是瓦尔拉斯均衡，如果满足下式。

$$\sum_i^n x_i(p^*,p^*w_i)\le\sum_i^n w_i \tag{17.2}$$

在完全竞争的交换市场，如果存在 $p$*（可以包括 $x$*），使得各商品市场无超额需求，那么 $p$* 就是瓦尔拉斯均衡。

## 第三节　图形分析

瓦尔拉斯均衡在交换契约线上达到（由均衡定义中的需求函数反应），在哪一点达到取决于初始禀赋点的位置。确切在说，均衡取决于初始禀赋和偏好。

已知初始禀赋和偏好的条件下，均衡由两条提供曲线（价格消费曲线）的交点决定。价格提供曲线又由初始禀赋点和偏好决定，它由下式定义：

$$\frac{\partial u_i(x_i^{\,1},x_i^{\,2})/\partial x_i^{\,1}}{\partial u_i(x_i^{\,1},x_i^{\,2})/\partial x_i^{\,2}}=-\frac{x_i^{\,2}-w_i^{\,2}}{x_i^{\,1}-w_i^{\,1}} \tag{17.3}$$

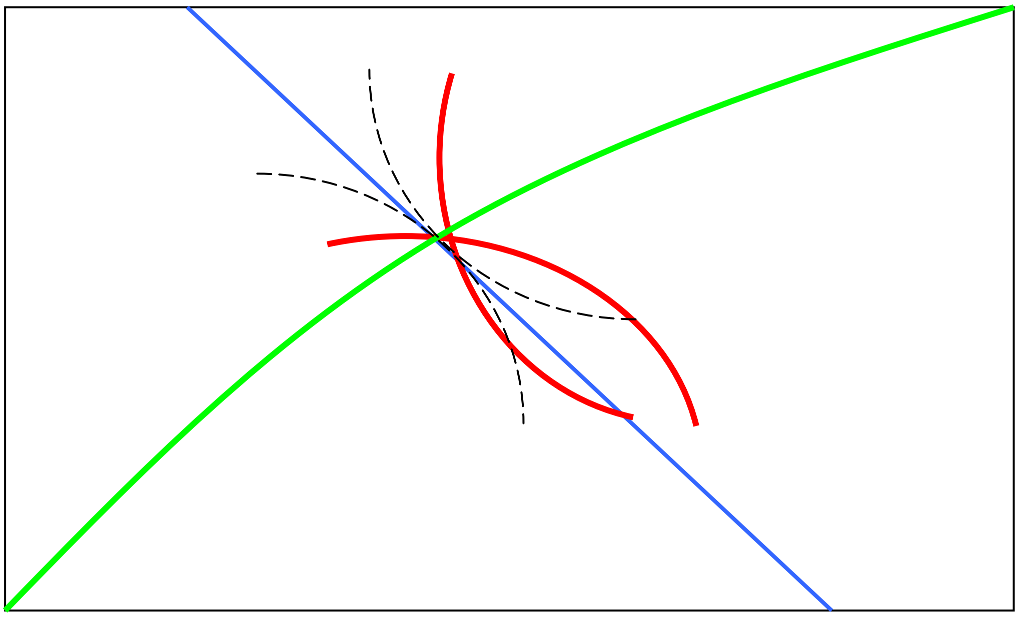


图 17.1　2-2 经济的瓦尔拉斯均衡

## 第四节　瓦尔拉斯法则

**瓦尔拉斯法则**：对任何价格向量，超额需求的价值恒等于零。或者 $\forall p, pz(p) \equiv 0$.。证明只需要根据超额需求的定义利用预算约束即可。

$$pz(p) = p\sum^{n}(x_i(p, pw) - w_i)$$
$$= \sum^{n}(px_i(p, pw) - pw_i)$$
$$= 0$$

**瓦尔拉斯定理**：如果前 $k$-1 个市场供求相等，且 $p_k$>0，那么第 $k$ 个市场必然供求相等。证明只需要依赖于瓦尔拉斯法则。

$$pz(p) = \sum^{k-1} p_i z_i(p) + p_k z_k = p_k z_k = 0$$

由于 $p_k$>0，所以。$z_k$=0

**自由取用物品**：如果 $z_i(p^*)$<0，那么 $p_i^* = 0$。即在瓦尔拉斯均衡时，如果某物品存在超额供给，那么该物品的均衡价格一定为零。或者，自由物品是瓦尔拉斯均衡价格为零的物品。证明，如果不是这样，将与瓦尔拉斯法则相违背。

$$p^* z(p^*) = \sum^{k-1} p_i^* z_i(p^*) + p_k^* z_k^* = p_k^* z_k^* = 0$$

如果前 k-1 个市场供求相等，且 $z_k$*<0，$p_k$* >0，椐上式有 $pz(p)$<0，与法则矛盾。

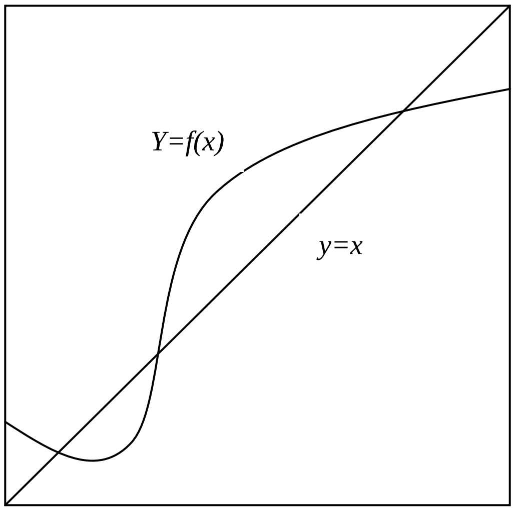
**合意性假定**；$\forall i, z_i(p) > 0, if\ p_i = 0$。假定对于任何物品，如果其价格为零就存在超额需求。合意性假定就是假定所有物品都是经济物品。

**合意均衡**：如果合意性假定成立，且 $p^*$ 是一个瓦尔拉斯均衡，则 $z(p^*) = 0$。或者，如果合意性假定成立，那么瓦尔拉斯均衡下所有市场都会出清。

### 第五节　均衡的存在性

**布劳沃不动点定理**。如果 $f: s^{k-1} \to s^{k-1}$ 是一个 $k$-1 维单位实数空间（k-1 维单位单形）到其自身的连续函数，则在 $k$-1 维单位实数空间一定存在某个向量 $x^*$，满足 $x^* = f(x^*)$（点 $x^*$称为不动点）。

证明：考虑连续函数 $f:[0,1] \to [0,1]$，定义 $g(x) = f(x) - x$，据定义有 $g(0) = f(0) - 0 \ge 0$，$g(1) = f(1) - 1 \le 0$，据中值定理，在 0 和 1 之间至少存在一个点 $x^*$，使得 $g(x^*) = 0$，即 $x^* = f(x^*)$。证毕。




**瓦尔拉斯均衡的存在性**

每一步：标准化价格向量。将 k 维正实数空间的价格向量变为 k-1 维单位实数空间的价格向量。标准化价格向量仍然满足瓦尔拉斯均衡定义和瓦尔拉斯法则。

第二步：构造标准化连续函数（向量）。

第三步：证明不动点存在。

第四步：证明这个不动点就是瓦尔拉斯均衡。

第一步，标准化价格向量。

定义：$q_j \equiv \dfrac{p_j}{\sum_j^J p_j}$，$j = 1, \cdots, J$，满足 $\sum_1^J q_j = 1$。此标准化价格向量有如下特征：

1、不改变超额需求函数。由需求函数的零次齐次性得到

$$z_j(p) = z_j(q), q = (q_1, \cdots, q_{J-1})$$

2、满足瓦尔拉斯法则，$qz(q) \equiv 0$。这是因为

$$qz(q) = \sum_j^J q_j z_j(q) = \frac{1}{\sum p_j} \sum_j^J p_j z_j(p) = 0 \text{。}$$

3、满足瓦尔拉斯均衡的定义：$q*$是一个瓦尔拉斯均衡，如果满足$z(q^*)\le 0$。这是因为

$$z(q^*)\le 0 \Leftrightarrow z(p^*)\le 0$$

第二步，构造连续函数 $f: s^{J-1}\to s^{J-1}$

$$f_j(q)=\frac{q_j+\max\{0,z_j(q)\}}{1+\sum_i^J \max\{0,z_i(q)\}} \quad\text{..........} \quad (17.4)$$

此函数有 3 个特征：1、连续的，2、取值范围在 0 和 1 之间，3、满足标准化 $\Sigma f_j$=1。现在有如下方程组

$$\begin{cases} f_1(q)=\dfrac{q_1+\max\{0,z_1(q)\}}{1+\sum_i^J \max\{0,z_i(q)\}} \\ \quad\vdots \\ f_{J-1}(q)=\dfrac{q_{J-1}+\max\{0,z_{J-1}(q)\}}{1+\sum_i^J \max\{0,z_i(q)\}} \end{cases} \quad\text{..........} \quad (17.5)$$

该方程组就是一个映射 $f: s^{J-1}\to s^{J-1}$

第三步，证明存在不动点 $q*$

根据布劳维沃不动点定理立即得出存在不动点 $q*$，满足 $q*=f(q*)$

第四步，证明不动点 $q*$就是瓦尔拉斯均衡，即证明，对于不动点 $q*$，满足 $z_i(q^*)\le 0$。

将不动力点代入（17.4）式得到：

$$q_j*\sum_i^J \max\{0,z_i(q^*)\}=\max\{0,z_j(q^*)\}$$

两端同时乘以 $z_j(p*)$得到

$$z_j(q^*)q_j*\sum_i^J \max\{0,z_i(q^*)\}=z_j(q^*)\max\{0,z_j(q^*)\}$$

将 J 个方程相加得到

$$[q*z(q^*)]\sum_i^J \max\{0,z_i(q^*)\}=\sum_j^J\left(z_j(q^*)\max\{0,z_j(q^*)\}\right) \quad\text{..........} \quad (17.6)$$

由瓦尔拉斯法则可知（17.6）式左端为零。右端 J 项中的每一项要么为零，要么为 $z_j^2\,(q^*)$。

所以（17.6）式要求$z_j(q^*)\le 0$。所以不动点 $q*$ 满足瓦尔拉斯均衡的定义，它就是一个瓦尔拉斯均衡。

**瓦尔拉斯拍卖人**

（17.4）式是瓦尔拉斯拍卖人的调价公式。首先拍卖人报出一组价格，各消费者根据该价格报出超额需求。如果某物品加总的超额需求大于零，就向上调整价格，反之亦然。

例子：CD 偏好。$u_1(x_1)=x_{11}x_{12}$，$u_2(x_2)=x_{21}x_{22}$，$w_1=(1,0)$.，$w_2=(0,1)$，

# 第十八章　生产



## 导言

**局部均衡与一般均衡**。是一对相对概念，但一般均衡常指交换、生产与产业结构。
**一般均衡与福利经济学**。实证与规范

## 第一节　分配空间

定义分配空间或分配集为可行的所有消费者的消费束的集合，即：

$$D(x) = \left\{x\,;\ \sum_i^n x_i = \sum_i^n w_i\right\} \quad (17.1)$$

其中，$x_i^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品消费量，$x_i$ 为 $i$ 的消费束，$x$ 为消费束组合；$w_i^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品初始禀赋，$w_i$ 为 $i$ 的禀赋束，$w$ 为禀赋束组合。即：

$$x = (x_i, \cdots, x_i),\ x_i = (x_i^1, \cdots, x_i^k),\ w = (w_i, \cdots, w_i),\ w_i = (w_i^1, \cdots, w_i^k)$$

在 $2\times 2$ 经济中，分配空间可以用艾奇沃斯盒状图来描述。

## 第二节　瓦尔拉斯均衡

定义：（$p^*,x^*$）是瓦尔拉斯均衡，如果满足下式。

$$\sum_i^n x_i(p^*, p^* w_i) \le \sum_i^n w_i \quad (17.2)$$

在完全竞争的交换市场，如果存在（$p^*,x^*$）使得各商品市场无超额需求，那么（$p^*,x^*$）就是瓦尔拉斯均衡。

## 第三节　图形分析

瓦尔拉斯均衡在交换契约线上达到（由均衡定义中的需求函数反应），在哪一点达到取决于初始禀赋点的位置。确切在说，均衡取决于初始禀赋和偏好。

已知初始禀赋和偏好的条件下，均衡由两条提供曲线（价格消费曲线）的交点决定。价格提供曲线又由初始禀赋点和偏好决定，它由下式定义：

$$\frac{\partial u_i(x_i^1, x_i^2)/\partial x_i^1}{\partial u_i(x_i^1, x_i^2)/\partial x_i^2} = -\frac{x_i^2 - w_i^2}{x_i^1 - w_i^1} \quad (17.3)$$

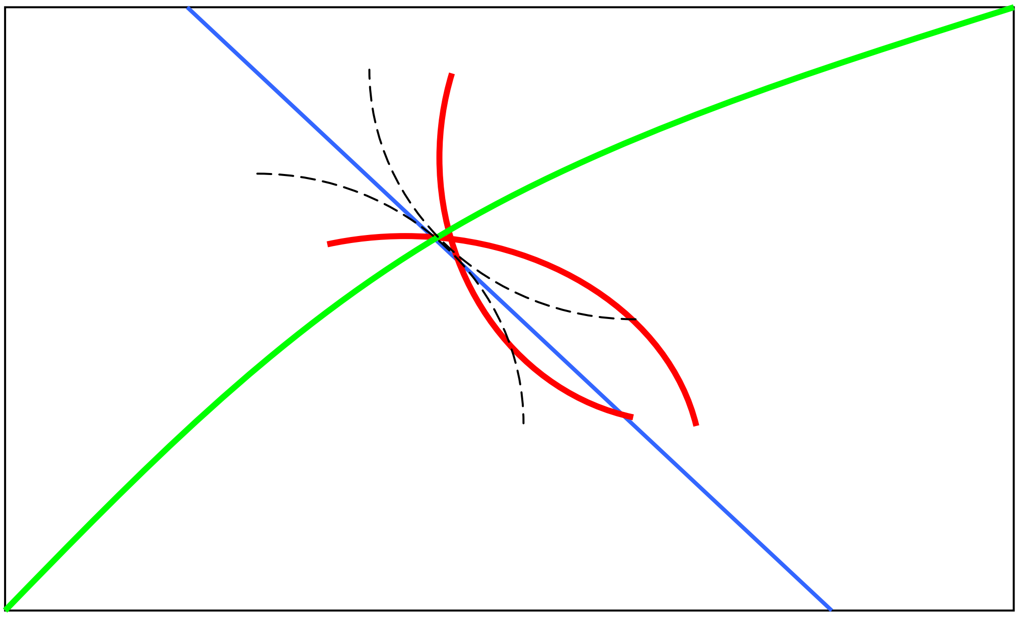


图 17.1 2-2 经济的瓦尔拉斯均衡

## 第四节 瓦尔拉斯法则

**瓦尔拉斯法则**：对任何价格向量，超额需求的价值恒等于零。或者 $\forall p, pz(p) \equiv 0$.。证明只需要根据超额需求的定义利用预算约束即可。

$$
\begin{aligned}
pz(p) &= p\sum^{n}(x_i(p,pw)-w_i) \\
&= \sum^{n}(px_i(p,pw)-pw_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

**瓦尔拉斯定理**：如果前 $k$-1 个市场供求相等，且 $p_k$>0，那么第 $k$ 个市场必然供求相等。证明只需要依赖于瓦尔拉斯法则。

$$pz(p)=\sum^{k-1}p_i z_i(p)+p_k z_k = p_k z_k = 0$$

由于 $p_k$>0，所以。$z_k$=0

**自由取用物品**：如果 $z_i(p^*)$<0，那么 $p_i^* = 0$。即在瓦尔拉斯均衡时，如果某物品存在超额供给，那么该物品的均衡价格一定为零。或者，自由物品是瓦尔拉斯均衡价格为零的物品。证明，如果不是这样，将与瓦尔拉斯法则相违背。

$$p^*z(p^*)=\sum^{k-1}p_i{}^*z_i(p^*)+p_k{}^*z_k{}^*=p_k{}^*z_k{}^*=0$$

如果前 k-1 个市场供求相等，且 $z_k$*<0，$p_k$* >0，据上式有 $pz(p)$<0，与法则矛盾。

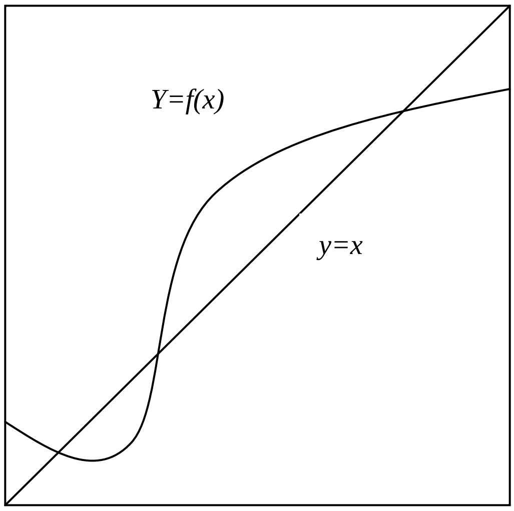
**合意性假定**；$\forall i, z_i(p)>0, if\ \ p_i=0$。合意性假定就是假定所有物品都是经济物品。

**合意均衡**：如果合意性假定成立，且 $p$*是一个瓦尔拉斯均衡，则 $z(p^*)$=0。或者，如果合意性假定成立，那么瓦尔拉斯均衡下所有市场都会出清。

## 第五节　均衡的存在性

**布劳沃不动点定理**。如果 $f: s^{k-1} \to s^{k-1}$ 是一个 $k$-1 维单位实数空间（k-1 维单位单形）到其自身的连续函数，则在 $k$-1 维单位实数空间一定存在某个向量 $x^*$，满足 $x^* = f(x^*)$（点 $x^*$ 称为不动点）。

证明：考虑连续函数 $f:[0,1] \to [0,1]$，定义 $g(x) = f(x) - x$，据定义有 $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$，$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$，据中值定理，在 0 和 1 之间至少存在一个点 $x^*$，使得 $g(x^*) = 0$，即 $x^* = f(x^*)$。证毕。




**瓦尔拉斯均衡的存在性**

每一步：标准化价格向量。将 k 维正实数空间的价格向量变为 k-1 维单位实数空间的价格向量。标准化价格向量仍然满足瓦尔拉斯均衡定义和瓦尔拉斯法则。

第二步：构造标准化函数连续函数（向量）。

第三步：证明不动点存在。

第四步：证明这个不动点就是瓦尔拉斯均衡。

第一步，标准化价格向量。

定义：$q_j \equiv \dfrac{p_j}{\sum_j^J p_j}$，$j = 1, \cdots, J$，满足 $\sum_1^J q_j = 1$。由需求函数的零次齐次性得到

$z_j(p) = z_j(q), q = (q_1, \cdots, q_{J-1})$

满足瓦尔拉斯法则，$qz(q) \equiv 0$。这是因为

$qz(q) = \sum_j^J q_j z_j(q) = \dfrac{1}{\sum p_j} \sum_j^J p_j z_j(p) = 0$。在标准价格下，仍然满足瓦尔拉斯均衡的

定义：$q^*$ 是一个瓦尔拉斯均衡，如果满足 $z(q^*) \leq 0$

假设只有两种商品 1 和 2，其价格为 $P_1$ 和 $P_2$，定义商品 1 的标准化价格为 $p_1=\frac{P_1}{P_1+P_2}$，因此商品 2 的标准化价格为 1-$p_1$。根据瓦尔拉斯定理，只需考察商品 1 的市场均衡，其条件为

$$x_1(P_1,P_2,P_1w_1+P_2w_2)=w_1 \qquad (17.4)$$

根据需求函数的零次齐次性

$$\begin{aligned} x_1(P_1,P_2,P_1w_1+P_2w_2) &= x_1\left(\frac{P_1}{P_1+P_2},\frac{P_2}{P_1+P_2},\frac{P_1}{P_1+P_2}w_1+\frac{P_2}{P_1+P_2}w_2\right) \\ &\equiv x_1(p_1,p_2,p_1w_1+p_2w_2) \\ &= x_1(p_1,1-p_1,p_1w_1+(1-p_1)w_2) \end{aligned}$$

代入（17.4）式得

$$x_1(p_1,1-p_1,p_1w_1+(1-p_1)w_2)=w_1 \qquad (17.5)$$

由（17.2）定义了一个连续函数 $F$（数学定理：一个单调连续函数的反函数也是单调连续的）

$$P_1=F(P_2)$$

比较（17.2）和（17.3）得

$$p_1=F(1-p_1)$$

定义 $f(p_1)\equiv F(1-p_1)$，所以

$$p_1=f(p_1) \qquad (17.6)$$

所以 $f:s\rightarrow s$ 是一个单位单形到其自身的连续函数。根据不动点定理，至少存在一个点 $p_1$*，满足（17.6），一般均衡解存在。

# 第十九章　时间



## 导言

**局部均衡与一般均衡**。是一对相对概念，但一般均衡常指交换、生产与产业结构。
**一般均衡与福利经济学**。实证与规范

## 第一节　分配空间

定义分配空间或分配集为可行的所有消费者的消费束的集合，即：

$$D(x)=\left\{x\,;\ \sum_i^n x_i=\sum_i^n w_i\right\} \qquad (17.1)$$

其中，$x_i^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品消费量，$x_i$ 为 $i$ 的消费束，$x$ 为消费束组合；$w_i^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品初始禀赋，$w_i$ 为 $i$ 的禀赋束，$w$ 为禀赋束组合。即：

$$x=(x_i,\cdots,x_i),\ x_i=(x_i^1,\cdots,x_i^k),\ w=(w_i,\cdots,w_i),\ w_i=(w_i^1,\cdots,w_i^k)$$

在 $2\times2$ 经济中，分配空间可以用艾奇沃斯盒状图来描述。

## 第二节　瓦尔拉斯均衡

定义：（$p^*$,$x^*$）是瓦尔拉斯均衡，如果满足下式。

$$\sum_i^n x_i(p^*,p^*w_i)\le\sum_i^n w_i \qquad (17.2)$$

在完全竞争的交换市场，如果存在（$p^*$,$x^*$）使得各商品市场无超额需求，那么（$p^*$,$x^*$）就是瓦尔拉斯均衡。

## 第三节　图形分析

瓦尔拉斯均衡在交换契约线上达到（由均衡定义中的需求函数反应），在哪一点达到取决于初始禀赋点的位置。确切在说，均衡取决于初始禀赋和偏好。

已知初始禀赋和偏好的条件下，均衡由两条提供曲线（价格消费曲线）的交点决定。价格提供曲线又由初始禀赋点和偏好决定，它由下式定义：

$$\frac{\partial u_i(x_i^1,x_i^2)/\partial x_i^1}{\partial u_i(x_i^1,x_i^2)/\partial x_i^2}=-\frac{x_i^2-w_i^2}{x_i^1-w_i^1} \qquad (17.3)$$

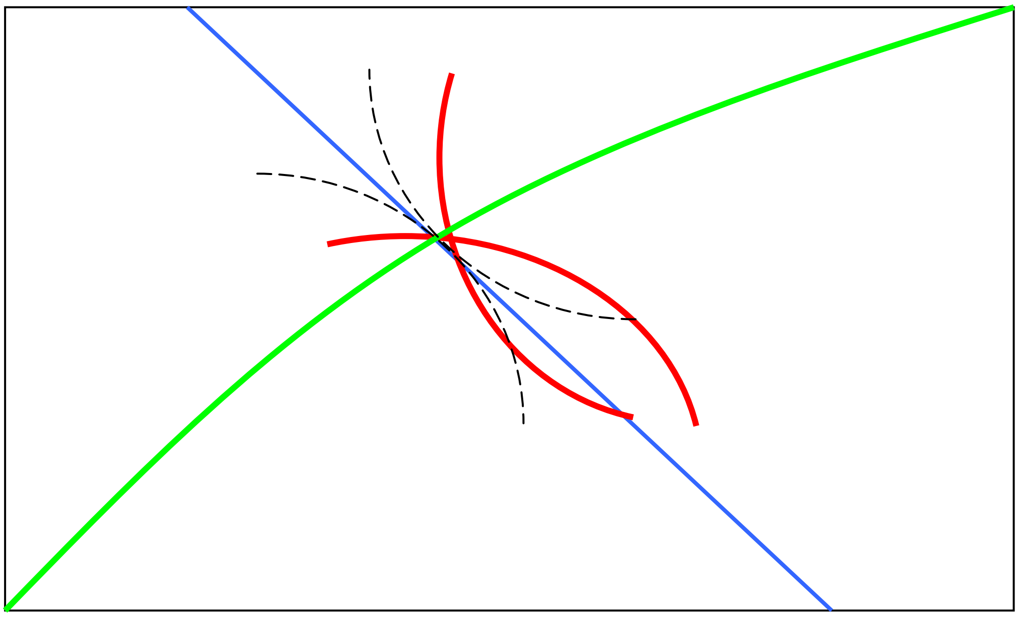


图 17.1　2-2 经济的瓦尔拉斯均衡

## 第四节　瓦尔拉斯法则

**瓦尔拉斯法则**：对任何价格向量，超额需求的价值恒等于零。或者 $\forall p, pz(p) \equiv 0$.。证明只需要根据超额需求的定义利用预算约束即可。

$$
\begin{aligned}
pz(p) &= p\sum^{n}(x_i(p,pw)-w_i) \\
&= \sum^{n}(px_i(p,pw)-pw_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

**瓦尔拉斯定理**：如果前 $k$-1 个市场供求相等，且 $p_k$>0，那么第 $k$ 个市场必然供求相等。证明只需要依赖于瓦尔拉斯法则。

$$pz(p) = \sum^{k-1} p_i z_i(p) + p_k z_k = p_k z_k = 0$$

由于 $p_k$>0，所以。$z_k$=0

**自由取用物品**：如果 $z_i(p^*)$<0，那么 $p_i^* = 0$。即在瓦尔拉斯均衡时，如果某物品存在超额供给，那么该物品的均衡价格一定为零。或者，自由物品是瓦尔拉斯均衡价格为零的物品。证明，如果不是这样，将与瓦尔拉斯法则相违背。

$$p^* z(p^*) = \sum^{k-1} p_i^* z_i(p^*) + p_k^* z_k^* = p_k^* z_k^* = 0$$

如果前 k-1 个市场供求相等，且 $z_k$*<0，$p_k$*>0，梞上式有 $pz(p)$<0，与法则矛盾。

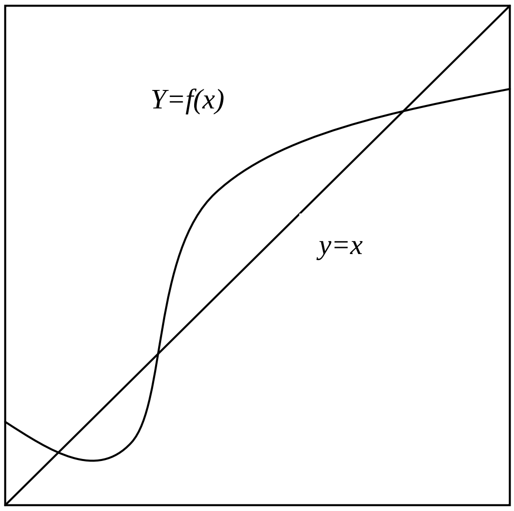
**合意性假定**；$\forall i, z_i(p) > 0, if\ \ p_i = 0$。合意性假定就是假定所有物品都是经济物品。

**合意均衡**：如果合意性假定成立，且 $p^*$是一个瓦尔拉斯均衡，则 $z(p^*)$=0。或者，如果合意性假定成立，那么瓦尔拉斯均衡下所有市场都会出清。

## 第五节　均衡的存在性

**布劳沃不动点定理**。如果 $f:s^{k-1}\rightarrow s^{k-1}$ 是一个 $k$-1 维单位实数空间（k-1 维单位单形）到其自身的连续函数，则在 $k$-1 维单位实数空间一定存在某个向量 $x$*，满足 $x^*=f(x^*)$（点 $x$*称为不动点）。

证明：考虑连续函数 $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$，定义 $g(x)=f(x)-x$，据定义有 $g(0)=f(0)-0\geq 0$，$g(1)=f(1)-1\leq 0$，据中值定理，在 0 和 1 之间至少存在一个点 $x$*，使得 $g(x^*)=0$，即 $x^*=f(x^*)$。证毕。




**瓦尔拉斯均衡的存在性**

每一步：标准化价格向量。将 k 维正实数空间的价格向量变为 k-1 维单位实数空间的价格向量。标准化价格向量仍然满足瓦尔拉斯均衡定义和瓦尔拉斯法则。

第二步：构造标准化函数连续函数（向量）。

第三步：证明不动点存在。

第四步：证明这个不动点就是瓦尔拉斯均衡。

第一步，标准化价格向量。

定义：$q_j\equiv\frac{p_j}{\sum_j^J p_j}$，$j=1,\cdots,J$，满足 $\sum_1^J q_j=1$。由需求函数的零次齐次性得到

$$z_j(p)=z_j(q),\ q=(q_1,\cdots,q_{J-1})$$

满足瓦尔拉斯法则，$qz(q)\equiv 0$。这是因为

$qz(q)=\sum_j^J q_j z_j(q)=\frac{1}{\sum p_j}\sum_j^J p_j z_j(p)=0$。在标准价格下，仍然满足瓦尔拉斯均衡的定义：$q^*$ 是一个瓦尔拉斯均衡，如果满足 $z(q^*)\leq 0$

假设只有两种商品 1 和 2，其价格为 $P_1$ 和 $P_2$，定义商品 1 的标准化价格为 $p_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$，因此商品 2 的标准化价格为 1-$p_1$。根据瓦尔拉斯定理，只需考察商品 1 的市场均衡，其条件为

$$x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) = w_1 \quad \text{(17.4)}$$

根据需求函数的零次齐次性

$$\begin{aligned} x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) &= x_1\left(\frac{P_1}{P_1 + P_2}, \frac{P_2}{P_1 + P_2}, \frac{P_1}{P_1 + P_2} w_1 + \frac{P_2}{P_1 + P_2} w_2\right) \\ &\equiv x_1(p_1, p_2, p_1 w_1 + p_2 w_2) \\ &= x_1(p_1, 1 - p_1, p_1 w_1 + (1 - p_1) w_2) \end{aligned}$$

代入（17.4）式得

$$x_1(p_1, 1 - p_1, p_1 w_1 + (1 - p_1) w_2) = w_1 \quad \text{(17.5)}$$

由（17.2）定义了一个连续函数 $F$（数学定理：一个单调连续函数的反函数也是单调连续的）

$$P_1 = F(P_2)$$

比较（17.2）和（17.3）得

$$p_1 = F(1 - p_1)$$

定义 $f(p_1) \equiv F(1 - p_1)$，所以

$$p_1 = f(p_1) \quad \text{(17.6)}$$

所以 $f: s \to s$ 是一个单位单形到其自身的连续函数。根据不动点定理，至少存在一个点 $p_1$*，满足（17.6），一般均衡解存在。

# 第二十章　资产市场



## 导言

**局部均衡与一般均衡**。是一对相对概念，但一般均衡常指交换、生产与产业结构。
**一般均衡与福利经济学**。实证与规范

## 第一节　分配空间

定义分配空间或分配集为可行的所有消费者的消费束的集合，即：

$$D(x)=\left\{x\,;\ \sum_i^n x_i=\sum_i^n w_i\right\} \qquad (17.1)$$

其中，$x_i^{\,j}$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品消费量，$x_i$ 为 $i$ 的消费束，$x$ 为消费束组合；$w_i^{\,j}$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品初始禀赋，$w_i$ 为 $i$ 的禀赋束，$w$ 为禀赋束组合。即：

$$x=(x_i,\cdots,x_i),\ x_i=(x_i^{\,1},\cdots,x_i^{\,k}),\ w=(w_i,\cdots,w_i),\ w_i=(w_i^{\,1},\cdots,w_i^{\,k})$$

在 $2\times 2$ 经济中，分配空间可以用艾奇沃斯盒状图来描述。

## 第二节　瓦尔拉斯均衡

定义：（$p$*,$x$*）是瓦尔拉斯均衡，如果满足下式。

$$\sum_i^n x_i(p^*,p^*w_i)\le\sum_i^n w_i \qquad (17.2)$$

在完全竞争的交换市场，如果存在（$p$*,$x$*）使得各商品市场无超额需求，那么（$p$*,$x$*）就是瓦尔拉斯均衡。

## 第三节　图形分析

瓦尔拉斯均衡在交换契约线上达到（由均衡定义中的需求函数反应），在哪一点达到取决于初始禀赋点的位置。确切在说，均衡取决于初始禀赋和偏好。

已知初始禀赋和偏好的条件下，均衡由两条提供曲线（价格消费曲线）的交点决定。价格提供曲线又由初始禀赋点和偏好决定，它由下式定义：

$$\frac{\partial u_i(x_i^{\,1},x_i^{\,2})/\partial x_i^{\,1}}{\partial u_i(x_i^{\,1},x_i^{\,2})/\partial x_i^{\,2}}=-\frac{x_i^{\,2}-w_i^{\,2}}{x_i^{\,1}-w_i^{\,1}} \qquad (17.3)$$

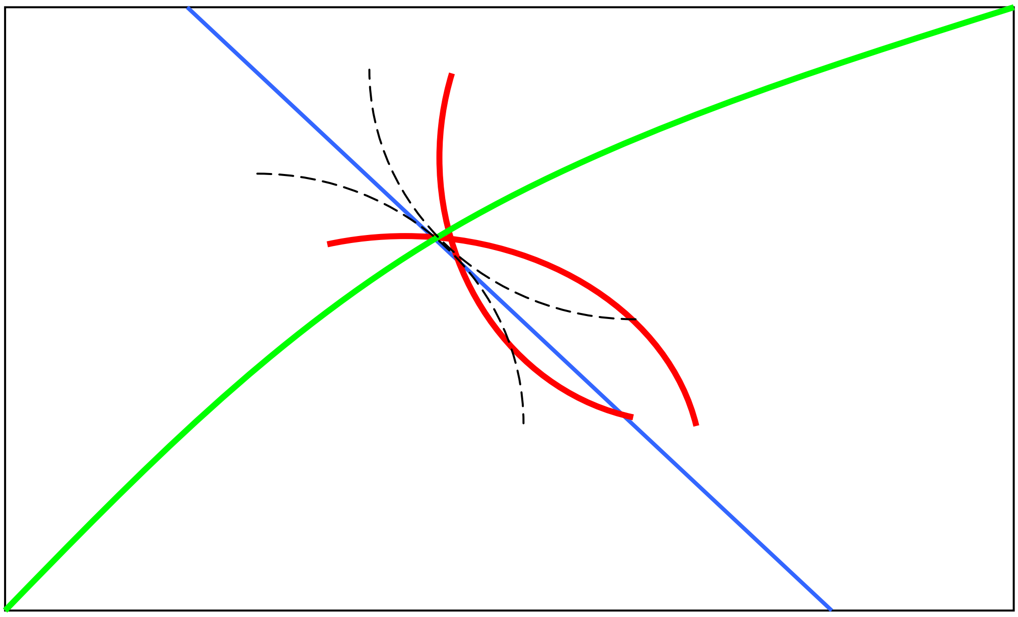


图 17.1　2-2 经济的瓦尔拉斯均衡

## 第四节　瓦尔拉斯法则

**瓦尔拉斯法则**：对任何价格向量，超额需求的价值恒等于零。或者 $\forall p, pz(p) \equiv 0$.。证明只需要根据超额需求的定义利用预算约束即可。

$$
\begin{aligned}
pz(p) &= p\sum^{n}(x_i(p,pw)-w_i) \\
&= \sum^{n}(px_i(p,pw)-pw_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

**瓦尔拉斯定理**：如果前 $k$-1 个市场供求相等，且 $p_k$>0，那么第 $k$ 个市场必然供求相等。证明只需要依赖于瓦尔拉斯法则。

$$pz(p)=\sum^{k-1}p_i z_i(p)+p_k z_k = p_k z_k = 0$$

由于 $p_k$>0，所以。$z_k$=0

**自由取用物品**：如果 $z_i(p^*)<0$，那么 $p_i^* = 0$。即在瓦尔拉斯均衡时，如果某物品存在超额供给，那么该物品的均衡价格一定为零。或者，自由物品是瓦尔拉斯均衡价格为零的物品。证明，如果不是这样，将与瓦尔拉斯法则相违背。

$$p^*z(p^*)=\sum^{k-1}p_i^* z_i(p^*)+p_k^* z_k^* = p_k^* z_k^* = 0$$

如果前 k-1 个市场供求相等，且 $z_k^*<0$，$p_k^*>0$，据上式有 $pz(p)<0$，与法则矛盾。

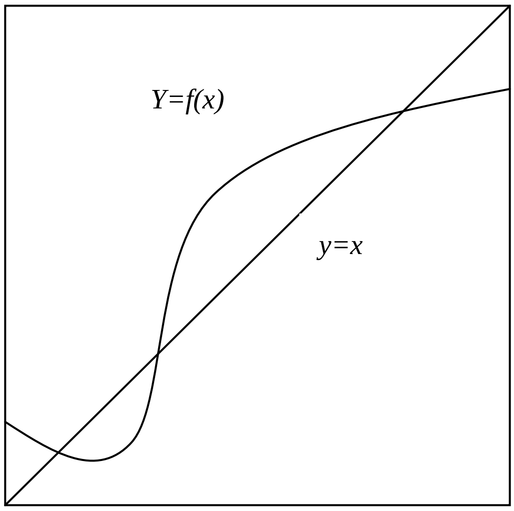
**合意性假定**；$\forall i, z_i(p)>0, if\ \ p_i=0$。合意性假定就是假定所有物品都是经济物品。

**合意均衡**：如果合意性假定成立，且 $p^*$是一个瓦尔拉斯均衡，则 $z(p^*)=0$。或者，如果合意性假定成立，那么瓦尔拉斯均衡下所有市场都会出清。

## 第五节　均衡的存在性

**布劳沃不动点定理**。如果 $f: s^{k-1} \to s^{k-1}$ 是一个 $k$-1 维单位实数空间（k-1 维单位单形）到其自身的连续函数，则在 $k$-1 维单位实数空间一定存在某个向量 $x$*，满足 $x^* = f(x^*)$（点 $x$*称为不动点）。

证明：考虑连续函数 $f:[0,1] \to [0,1]$，定义 $g(x) = f(x) - x$，据定义有 $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$，$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$，据中值定理，在 0 和 1 之间至少存在一个点 $x$*，使得 $g(x^*) = 0$，即 $x^* = f(x^*)$。证毕。




**瓦尔拉斯均衡的存在性**

每一步：标准化价格向量。将 k 维正实数空间的价格向量变为 k-1 维单位实数空间的价格向量。标准化价格向量仍然满足瓦尔拉斯均衡定义和瓦尔拉斯法则。

第二步：构造标准化函数连续函数（向量）。

第三步：证明不动点存在。

第四步：证明这个不动点就是瓦尔拉斯均衡。

第一步，标准化价格向量。

定义：$q_j \equiv \dfrac{p_j}{\sum_j^J p_j}$，$j = 1, \cdots, J$，满足 $\sum_1^J q_j = 1$。由需求函数的零次齐次性得到

$z_j(p) = z_j(q), q = (q_1, \cdots, q_{J-1})$

满足瓦尔拉斯法则，$qz(q) \equiv 0$。这是因为

$qz(q) = \sum_j^J q_j z_j(q) = \dfrac{1}{\sum p_j} \sum_j^J p_j z_j(p) = 0$。在标准价格下，仍然满足瓦尔拉斯均衡的

定义：$q$* 是一个瓦尔拉斯均衡，如果满足 $z(q^*) \leq 0$

假设只有两种商品 1 和 2，其价格为 $P_1$ 和 $P_2$，定义商品 1 的标准化价格为 $p_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$，因此商品 2 的标准化价格为 1-$p_1$。根据瓦尔拉斯定理，只需考察商品 1 的市场均衡，其条件为

$$x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) = w_1 \quad \text{(17.4)}$$

根据需求函数的零次齐次性

$$\begin{aligned} x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) &= x_1\left(\frac{P_1}{P_1+P_2}, \frac{P_2}{P_1+P_2}, \frac{P_1}{P_1+P_2} w_1 + \frac{P_2}{P_1+P_2} w_2\right) \\ &\equiv x_1(p_1, p_2, p_1 w_1 + p_2 w_2) \\ &= x_1(p_1, 1-p_1, p_1 w_1 + (1-p_1) w_2) \end{aligned}$$

代入（17.4）式得

$$x_1(p_1, 1-p_1, p_1 w_1 + (1-p_1) w_2) = w_1 \quad \text{(17.5)}$$

由（17.2）定义了一个连续函数 $F$（数学定理：一个单调连续函数的反函数也是单调连续的）

$$P_1 = F(P_2)$$

比较（17.2）和（17.3）得

$$p_1 = F(1-p_1)$$

定义 $f(p_1) \equiv F(1-p_1)$，所以

$$p_1 = f(p_1) \quad \text{(17.6)}$$

所以 $f: s \to s$ 是一个单位单形到其自身的连续函数。根据不动点定理，至少存在一个点 $p_1$*，满足（17.6），一般均衡解存在。

# 第二十一章　均衡分析



## 导言

**局部均衡与一般均衡**。是一对相对概念，但一般均衡常指交换、生产与产业结构。
**一般均衡与福利经济学**。实证与规范

## 第一节　交换经济中的核

定义分配空间或分配集为可行的所有消费者的消费束的集合，即：

$$D(x)=\left\{x\,;\ \sum_i^n x_i=\sum_i^n w_i\right\} \qquad (17.1)$$

其中，$x_i^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品消费量，$x_i$ 为 $i$ 的消费束，$x$ 为消费束组合；$w_i^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品初始禀赋，$w_i$ 为 $i$ 的禀赋束，$w$ 为禀赋束组合。即：

$$x=(x_i,\cdots,x_i),\ x_i=(x_i^1,\cdots,x_i^k),\ w=(w_i,\cdots,w_i),\ w_i=(w_i^1,\cdots,w_i^k)$$

在 $2\times 2$ 经济中，分配空间可以用艾奇沃斯盒状图来描述。

## 第二节　凸性和经济规模

本节讨论凸性、经济规模与均衡的关系。结论是：在大型经济中，如果偏好的非凸性相对于市场规模较小，则一般均衡将存在一个价格向量，使需求接近于供给。

## 第三节　均衡的唯一性

总替代意味着唯一均衡。如果在所有价格向量下所有商品都是总替代的，且 p*是一个均衡价格向量，则它是唯一的。

总替代是指马歇尔交叉价格弹性大于零，或者 $\dfrac{\partial x_j(p)}{\partial p_i}\geq 0$。

微分拓扑定理：若所有均衡有正的指数，则仅存在一个均衡。
均衡的唯一性。假设 z 是一个定义于价格单形上的具有连续导函数的总超额需求函数，且当 pi=0 时，有 zi(pi)>0，若 K-1 阶方阵（-Dz(p*)）在所有均衡中有正的行列式，则存在唯一均衡。

## 第四节　一般均衡动态

**瓦尔拉斯法则**：对任何价格向量，超额需求的价值恒等于零。或者 $\forall p,\ pz(p)\equiv 0$.。证明只需要根据超额需求的定义利用预算约束即可。

$$\begin{aligned} pz(p) &= p\sum^{n}(x_i(p,pw)-w_i) \\ &= \sum^{n}(px_i(p,pw)-pw_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**瓦尔拉斯定理**：如果前 $k$-1 个市场供求相等，且 $p_k$>0，那么第 $k$ 个市场必然供求相等。证明只需要依赖于瓦尔拉斯法则。

$$pz(p) = \sum^{k-1} p_i z_i(p) + p_k z_k = p_k z_k = 0$$

由于 $p_k$>0，所以。$z_k$=0

**自由取用物品**：如果 $z_i(p^*)$<0，那么 $p_i^* = 0$。即在瓦尔拉斯均衡时，如果某物品存在超额供给，那么该物品的均衡价格一定为零。或者，自由物品是瓦尔拉斯均衡价格为零的物品。证明，如果不是这样，将与瓦尔拉斯法则相违背。

$$p^* z(p^*) = \sum^{k-1} p_i^* z_i(p^*) + p_k^* z_k^* = p_k^* z_k^* = 0$$

如果前 k-1 个市场供求相等，且 $z_k^*$<0，$p_k^*$>0，根上式有 $pz(p)$<0，与法则矛盾。

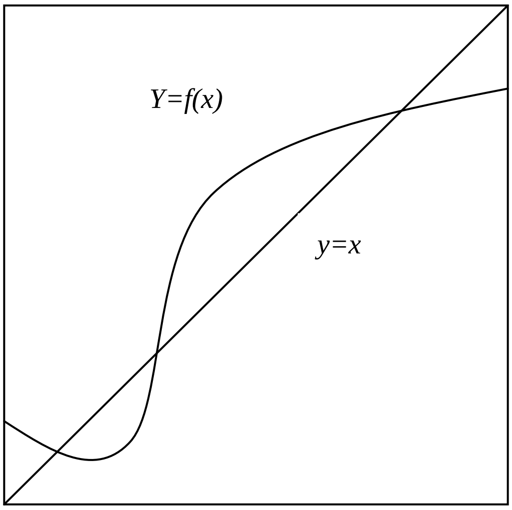
**合意性假定**；$\forall i, z_i(p) > 0, if\ p_i = 0$。合意性假定就是假定所有物品都是经济物品。

**合意均衡**：如果合意性假定成立，且 $p^*$是一个瓦尔拉斯均衡，则 $z(p^*)$=0。或者，如果合意性假定成立，那么瓦尔拉斯均衡下所有市场都会出清。

## 第五节　试探过程

**布劳沃不动点定理**。如果 $f: s^{k-1} \to s^{k-1}$ 是一个 $k$-1 维单位实数空间（k-1 维单位单形）到其自身的连续函数，则在 $k$-1 维单位实数空间一定存在某个向量 $x^*$，满足 $x^* = f(x^*)$（点 $x^*$称为不动点）。

证明：考虑连续函数 $f:[0,1] \to [0,1]$，定义 $g(x) = f(x) - x$，据定义有 $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$，$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$，据中值定理，在 0 和 1 之间至少存在一个点 $x^*$，使得 $g(x^*) = 0$，即 $x^* = f(x^*)$。证毕。




**瓦尔拉斯均衡的存在性**

每一步：标准化价格向量。将 k 维正实数空间的价格向量变为 k-1 维单位实数空间的价格向量。标准化价格向量仍然满足瓦尔拉斯均衡定义和瓦尔拉斯法则。

第二步：构造标准化函数连续函数（向量）。

第三步：证明不动点存在。

第四步：证明这个不动点就是瓦尔拉斯均衡。

第一步，标准化价格向量。

定义：$q_j \equiv \frac{p_j}{\sum_j^J p_j}$，$j=1,\cdots,J$，满足$\sum_1^J q_j = 1$。由需求函数的零次齐次性得到

$z_j(p) = z_j(q), q = (q_1,\cdots,q_{J-1})$

满足瓦尔拉斯法则，$qz(q) \equiv 0$。这是因为

$qz(q) = \sum_j^J q_j z_j(q) = \frac{1}{\sum p_j}\sum_j^J p_j z_j(p) = 0$。在标准价格下，仍然满足瓦尔拉斯均衡的

定义：$q*$是一个瓦尔拉斯均衡，如果满足$z(q*) \le 0$

假设只有两种商品 1 和 2，其价格为 $P_1$ 和 $P_2$，定义商品 1 的标准化价格为 $p_1 = \frac{P_1}{P_1+P_2}$，因此商品 2 的标准化价格为 $1-p_1$。根据瓦尔拉斯定理，只需考察商品 1 的市场均衡，其条件为

$$x_1(P_1,P_2,P_1w_1+P_2w_2) = w_1 \qquad (17.4)$$

根据需求函数的零次齐次性

$$
\begin{aligned}
x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) &= x_1\left(\frac{P_1}{P_1+P_2}, \frac{P_2}{P_1+P_2}, \frac{P_1}{P_1+P_2} w_1 + \frac{P_2}{P_1+P_2} w_2\right) \\
&\equiv x_1(p_1, p_2, p_1 w_1 + p_2 w_2) \\
&= x_1(p_1, 1-p_1, p_1 w_1 + (1-p_1) w_2)
\end{aligned}
$$

代入（17.4）式得

$$x_1(p_1, 1-p_1, p_1 w_1 + (1-p_1) w_2) = w_1 \quad \text{(17.5)}$$

由（17.2）定义了一个连续函数 $F$（数学定理：一个单调连续函数的反函数也是单调连续的）

$$P_1 = F(P_2)$$

比较（17.2）和（17.3）得

$$p_1 = F(1-p_1)$$

定义 $f(p_1) \equiv F(1-p_1)$，所以

$$p_1 = f(p_1) \quad \text{(17.6)}$$

所以 $f: s \to s$ 是一个单位单形到其自身的连续函数。根据不动点定理，至少存在一个点 $p_1$*，满足（17.6），一般均衡解存在。

## 第六节　无试探过程

# 第二十二章　福利



## 导言

**局部均衡与一般均衡**。是一对相对概念，但一般均衡常指交换、生产与产业结构。
**一般均衡与福利经济学**。实证与规范

## 第一节　分配空间

定义分配空间或分配集为可行的所有消费者的消费束的集合，即：

$$D(x)=\left\{x\,;\ \sum_i^n x_i=\sum_i^n w_i\right\} \quad (17.1)$$

其中，$x_i{}^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品消费量，$x_i$ 为 $i$ 的消费束，$x$ 为消费束组合；$w_i{}^j$ 为消费者 $i$ 的 $j$ 商品初始禀赋，$w_i$ 为 $i$ 的禀赋束，$w$ 为禀赋束组合。即：

$$x=(x_i,\cdots,x_i),\ x_i=(x_i{}^1,\cdots,x_i{}^k),\ w=(w_i,\cdots,w_i),\ w_i=(w_i{}^1,\cdots,w_i{}^k)$$

在 $2\times 2$ 经济中，分配空间可以用艾奇沃斯盒状图来描述。

## 第二节　瓦尔拉斯均衡

定义：（$p^*$,$x^*$）是瓦尔拉斯均衡，如果满足下式。

$$\sum_i^n x_i(p^*,p^*w_i)\le\sum_i^n w_i \quad (17.2)$$

在完全竞争的交换市场，如果存在（$p^*$,$x^*$）使得各商品市场无超额需求，那么（$p^*$,$x^*$）就是瓦尔拉斯均衡。

## 第三节　图形分析

瓦尔拉斯均衡在交换契约线上达到（由均衡定义中的需求函数反应），在哪一点达到取决于初始禀赋点的位置。确切在说，均衡取决于初始禀赋和偏好。

已知初始禀赋和偏好的条件下，均衡由两条提供曲线（价格消费曲线）的交点决定。价格提供曲线又由初始禀赋点和偏好决定，它由下式定义：

$$\frac{\partial u_i(x_i{}^1,x_i{}^2)/\partial x_i{}^1}{\partial u_i(x_i{}^1,x_i{}^2)/\partial x_i{}^2}=-\frac{x_i{}^2-w_i{}^2}{x_i{}^1-w_i{}^1} \quad (17.3)$$

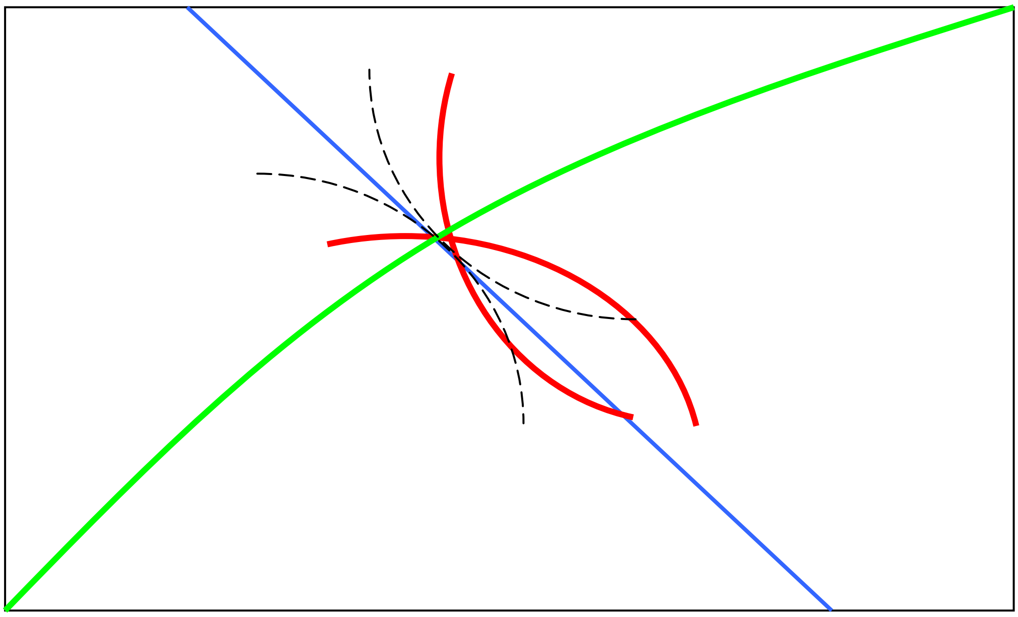


图 17.1　2-2 经济的瓦尔拉斯均衡

## 第四节　瓦尔拉斯法则

**瓦尔拉斯法则**：对任何价格向量，超额需求的价值恒等于零。或者 $\forall p, pz(p) \equiv 0$.。证明只需要根据超额需求的定义利用预算约束即可。

$$\begin{aligned} pz(p) &= p\sum^{n}(x_i(p, pw) - w_i) \\ &= \sum^{n}(px_i(p, pw) - pw_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**瓦尔拉斯定理**：如果前 $k$-1 个市场供求相等，且 $p_k$>0，那么第 $k$ 个市场必然供求相等。证明只需要依赖于瓦尔拉斯法则。

$$pz(p) = \sum^{k-1} p_i z_i(p) + p_k z_k = p_k z_k = 0$$

由于 $p_k$>0，所以。$z_k$=0

**自由取用物品**：如果 $z_i(p^*)$<0，那么 $p_i^* = 0$。即在瓦尔拉斯均衡时，如果某物品存在超额供给，那么该物品的均衡价格一定为零。或者，自由物品是瓦尔拉斯均衡价格为零的物品。证明，如果不是这样，将与瓦尔拉斯法则相违背。

$$p^* z(p^*) = \sum^{k-1} p_i^* z_i(p^*) + p_k^* z_k^* = p_k^* z_k^* = 0$$

如果前 k-1 个市场供求相等，且 $z_k$*<0，$p_k$* >0，据上式有 $pz(p)$<0，与法则矛盾。

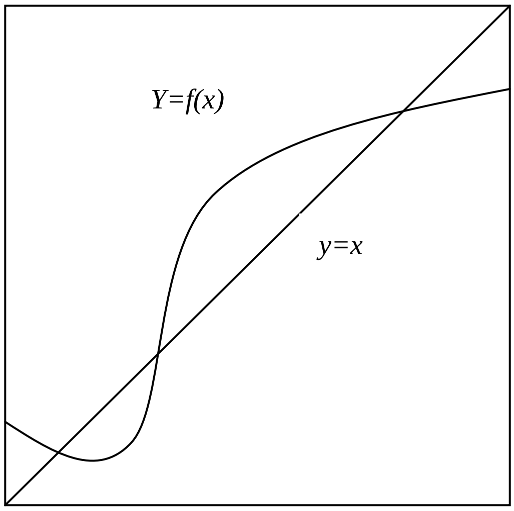
**合意性假定**；$\forall i, z_i(p) > 0, if\ \ p_i = 0$。合意性假定就是假定所有物品都是经济物品。

**合意均衡**：如果合意性假定成立，且 $p$*是一个瓦尔拉斯均衡，则 $z(p^*)$=0。或者，如果合意性假定成立，那么瓦尔拉斯均衡下所有市场都会出清。

## 第五节 均衡的存在性

**布劳沃不动点定理**。如果 $f: s^{k-1} \to s^{k-1}$ 是一个 $k$-1 维单位实数空间（k-1 维单位单形）到其自身的连续函数，则在 $k$-1 维单位实数空间一定存在某个向量 $x^*$，满足 $x^* = f(x^*)$（点 $x^*$称为不动点）。

证明：考虑连续函数 $f:[0,1] \to [0,1]$，定义 $g(x) = f(x) - x$，据定义有 $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$，$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$，据中值定理，在 0 和 1 之间至少存在一个点 $x^*$，使得 $g(x^*) = 0$，即 $x^* = f(x^*)$。证毕。




**瓦尔拉斯均衡的存在性**

每一步：标准化价格向量。将 k 维正实数空间的价格向量变为 k-1 维单位实数空间的价格向量。标准化价格向量仍然满足瓦尔拉斯均衡定义和瓦尔拉斯法则。

第二步：构造标准化函数连续函数（向量）。

第三步：证明不动点存在。

第四步：证明这个不动点就是瓦尔拉斯均衡。

第一步，标准化价格向量。

定义：$q_j \equiv \dfrac{p_j}{\sum_j^J p_j}$，$j = 1, \cdots, J$，满足 $\sum_1^J q_j = 1$。由需求函数的零次齐次性得到

$$z_j(p) = z_j(q), q = (q_1, \cdots, q_{J-1})$$

满足瓦尔拉斯法则，$qz(q) \equiv 0$。这是因为

$qz(q) = \sum_j^J q_j z_j(q) = \dfrac{1}{\sum p_j} \sum_j^J p_j z_j(p) = 0$。在标准价格下，仍然满足瓦尔拉斯均衡的

定义：$q^*$ 是一个瓦尔拉斯均衡，如果满足 $z(q^*) \leq 0$

假设只有两种商品 1 和 2，其价格为 $P_1$ 和 $P_2$，定义商品 1 的标准化价格为 $p_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$，因此商品 2 的标准化价格为 1-$p_1$。根据瓦尔拉斯定理，只需考察商品 1 的市场均衡，其条件为

$$x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) = w_1 \qquad (17.4)$$

根据需求函数的零次齐次性

$$\begin{aligned} x_1(P_1, P_2, P_1 w_1 + P_2 w_2) &= x_1\left(\frac{P_1}{P_1+P_2}, \frac{P_2}{P_1+P_2}, \frac{P_1}{P_1+P_2} w_1 + \frac{P_2}{P_1+P_2} w_2\right) \\ &\equiv x_1(p_1, p_2, p_1 w_1 + p_2 w_2) \\ &= x_1(p_1, 1-p_1, p_1 w_1 + (1-p_1) w_2) \end{aligned}$$

代入（17.4）式得

$$x_1(p_1, 1-p_1, p_1 w_1 + (1-p_1) w_2) = w_1 \qquad (17.5)$$

由（17.2）定义了一个连续函数 $F$（数学定理：一个单调连续函数的反函数也是单调连续的）

$$P_1 = F(P_2)$$

比较（17.2）和（17.3）得

$$p_1 = F(1-p_1)$$

定义 $f(p_1) \equiv F(1-p_1)$，所以

$$p_1 = f(p_1) \qquad (17.6)$$

所以 $f: s \to s$ 是一个单位单形到其自身的连续函数。根据不动点定理，至少存在一个点 $p_1$*，满足（17.6），一般均衡解存在。

# 第二十三章　公共物品



**一些基本概念**

公共物品：具有非排他性和非竞争性的物品。
非排他性：不能把某些人对物品的消费排除在外。
非竞争性：一个人的消费不减少其他人的可用量。
俱乐部物品：排他的但非竞争的物品。
公共资源：非排他的但竞争的物品
准公共物品：具有排他性和竞争性，但政府提供的物品（教育）
竞争性的描述

完全竞争性：$x_1 + x_2 = 1 \;\; x_2'(x_1) = -1$

完全非竞争性：$x_1 \le 1, x_2 \le 1; \; x_2'(x_1) = 0$

拥挤：$x_1 + x_2 \le 1 + a, \quad 0 < a < 1; \; 0 < x_2'(x_1) < 1$

## 第一节　离散型公共物品的有效供给

当且仅当支付意愿之和大于供给成本时，提供一离散公共物品才是帕累托改进。证明如下：

$$G = \begin{cases} 1 & if \quad g_1 + g_2 \ge c \\ 0 & if \quad g_1 + g_2 < 0 \end{cases}$$

设效用函数为 $u_i(G, x_i)$

$$u_i(1, w_i - g_i) > u_i(0, w_i) = ui(1, \; w_i - r_i)$$
$$w_i - g_i > w_i - r_i$$
$$r_i > g_i$$
$$r_1 + r_2 > g_1 + g_2 > c$$

## 第二节　离散公共物品的私人提供

囚徒困境或斗鸡或智猪

## 第三节　离散公共物品投票

一、多数赞成规则往往无效

如公共物品生产成本为 99，A 的意愿支付为 90，B 和 C 的意愿支付为 30。

二、成本---意愿规则无效。事先确定成本负担份额，然后消费者宣布支付意愿，意愿之和大于成本则提供。

三、意愿---成本规则无效。首先宣布支付意愿，然后根据支付意愿确定成本负担份额

## 第四节　连续公共物品的有效供给

公共物品生产函数：f(G),$G=g_1+g_2$，G 为公共物品生产投入。

效用函数：$U_t(f(G),x_t)\equiv u_t(G,x_t)$

约束条件：$g_t+x_t=w_t$

社会福利最大化：

$$\max_{g1,g2}\ au_1(G,w_1-g_1)+bu_2(G,w_2-g_2)$$

$$\begin{cases} a\partial u_1/\partial G+b\partial u_2/\partial G=a\partial u_1/\partial x_1 \\ a\partial u_1/\partial G+b\partial u_2/\partial G=b\partial u_2/\partial x_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_1/\partial G}{\partial u_1/\partial x_1}+\frac{\partial u_2/\partial G}{\partial u_2/\partial x_2}=1$$

$$MRS_1+MRS_2=1$$

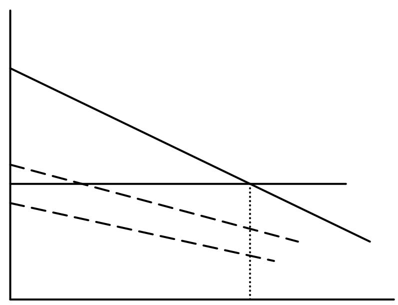
假定公共物品的边际成本为常数 c，是预算约束为 $cg_t+x_t=w_t$，这里福利最大化问题是

$$\max_{g1,g2}\ au_1(G,w_1-cg_1)+bu_2(G,w_2-cg_2)$$

$$\begin{cases} a\partial u_1/\partial G+b\partial u_2/\partial G=ca\partial u_1/\partial x_1 \\ a\partial u_1/\partial G+b\partial u_2/\partial G=cb\partial u_2/\partial x_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_1/\partial G}{\partial u_1/\partial x_1}+\frac{\partial u_2/\partial G}{\partial u_2/\partial x_2}=c$$

$$MRS_1+MRS_2=c$$



公共物品的消费量是相同的，边际支付不同的，社会需求线等于消费者需求线垂直相加

边际替代率可理解为一单位公共物品所能够替代的货币的数量（将私人物品当作化在私人物品上的货币），即公共物品的边际意愿支付；或者理解为一单位公共物品所能够替代的私人物品的数量，即公共物品的真实边际支付意愿（以私人物品为单位而不是货币）。一阶条件表明公共物品的有效供给条件为各消费者对公共物品的边际支付意愿之和等于生产公共物品的边际成本。

在拟线性偏好下

$$\max_{g1,g2}\ a\{u_1(G)+w_1-cg_1\}+b\{u_2(G)+w_2-cg_2\}$$

$$\begin{cases} au_1'(G)+bu_2'(G)=ca \\ au_1'(G)+bu_2'(G)=cb \end{cases}$$

$$u_1'(G)+u_2'(G)=c$$

$$G=G(c)$$

在拟线性偏好下 u’(G)就是边际支付意愿。与一般偏好不同之外在于公共物品的最优提供量与财富无关，因为 G 成食盐之类的物品，收入效应为零。

## 第五节　连续公共物品的私人供应

考虑完全信息静态博弈。参与人 1 的效用最大化问题为

$$\max_{g1,}\ u_1(G, w_1 - cg_1) \qquad s.t.\ \ g_1 \geq 0$$

$$L = u_1(G, w_1 - cg_1) + \mu g_1$$

$$\partial u_1 / \partial G - c\partial u_1 / \partial x_1 + \mu = 0$$

$$\partial u_1 / \partial G - c\partial u_1 / \partial x_1 \leq 0$$

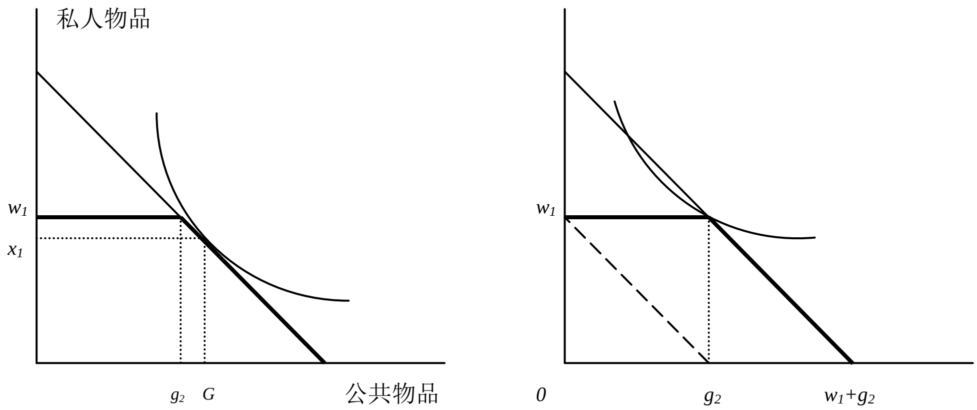
$$\frac{\partial u_1 / \partial G}{\partial u_1 / \partial x_1} \leq c$$

$$MRS^{Gx} \leq c$$

下图在边际成本为 1 下描述库恩-塔克一阶条件。参与人 1 的预算约束为

$$x_1 + g_1 = w_1$$

$$\begin{cases} x_1 + G = w_1 + g_2 \\ x_1 \leq w_1 \end{cases}$$




左图为参与人 1 提供一正的公共物品数量，满足等式一阶条件；右图提供量为零，满足严格不等式一阶条件（在均衡点，即禀赋上无差异线比预算线平）。他人提供公共物品扩大了预算空间,，原空间为三角形 $og_2w_1$。

在什么条件下提供公共物品需要求解纳什均衡。考虑如下最优化问题

$$\max_{G,x1,}\ u_1(G, x_1) \qquad s.t.\ \ G \geq g_2 \quad G + x_1 = w_1 + g_2$$

如果有内解存在，其解函数为

$$G = f_1(w) \qquad w = w_1 + g_2$$

到无内解存在的可能性后，由参与人 1 决定的公共物品的数量为

$$G = \max\{f_1(w),\ g_2\}$$

两边同时减 $g_2$

$$g_1 = \max\{f_1(w) - g_2,\ 0\}$$

上式即为参与人 1 的反应函数，类似地可以得到参与人 2 的反应。联立两个反应函数的解就是纳什均衡。

$$\begin{cases} g_1^* = \max\{ f_1(w_1 + g_2^*) - g_2^*,\ 0\} \\ g_2^* = \max\{ f_2(w_2 + g_1^*) - g_2^*,\ 0\} \end{cases}$$

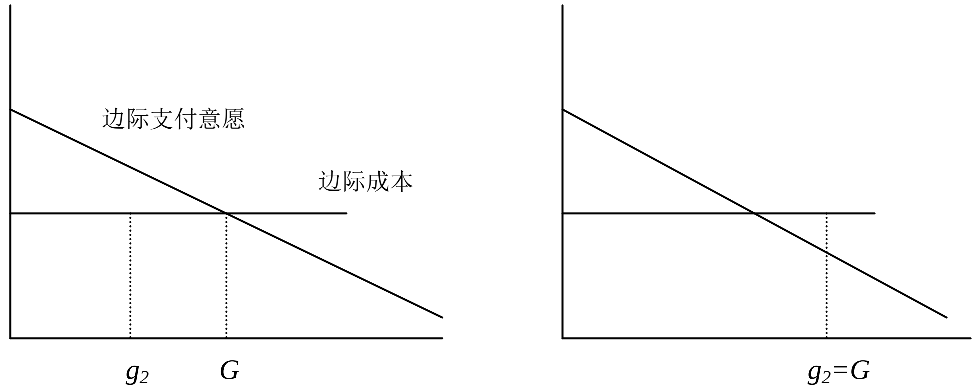
在拟线性偏好下更好理解。考虑下列问题

$$\max_G\ u(G) + w_1 - G + g_2 \quad s.t.\ G - g_2 \geq 0$$

$$u'(G) - 1 + \mu = 0$$

$$u'(G) = 1 - \mu$$

根据互补性松弛条件，可知只有当 u’(G)=1 时参与人 1 才有可能提供公共物品，所以某参与人提供公共物品的必要条件是在他人提供的数量上该参与人的边际意愿支付大于提供公共物品的边际成本，其提供数量由等边际原则决定。但要注意的是要考虑给定他人提供数量的前提。

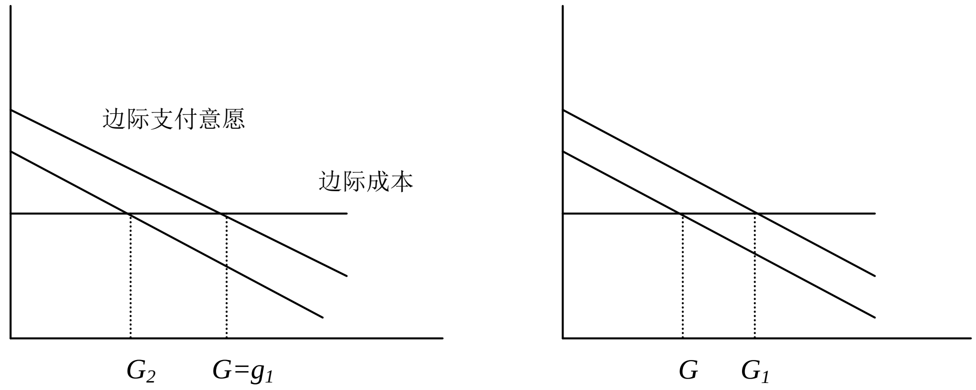



左图中参与人 1 提供正的公共物品，因为在他人提供的水平上边际支付意愿大于边际成本。右图中不提供公共物品，因为在他人提供的水平上边际支付意愿小于边际成本。

纳什均衡由方程组决定

$$\begin{cases} u_1'(g_1^* + g_2^*) \leq 1 \\ u_2'(g_1^* + g_2^*) \leq 1 \end{cases}$$

如果满足单交叉性，即 $u_1'(G) > u_2'(G)$，则提供一个高需求决定的公共物品数量，参与人 2 搭便车是一个且是唯一的一个纳什均衡。首先，在均衡中高需与低需求者都没有偏离的激励，所以这是一个纳什均衡。其次，如果 G 由高需求者的一阶等式条件决定，低需求者提供任何正的数量，则低需求者有减少提供的激励。最后，如果 G 是任一其他数量，则高需求者的一阶等式条件不能满足。因此提供一个高需求决定的公共物品数量，且参与人 2 搭便车是唯一的均衡。




如果满足单交叉性参与人 1 提供全部公共物品是唯一的纳什均衡。左图中均衡 G 由高需求者的需求曲线决定，参与人 2 提供任何正的数量都不是均衡，因为他可单方面降低提供量而增进福利。右图的 G 由低需求曲线决定，这不是一个均衡，高需求者有增加提供量的激励。

例子：C-D 偏好

$$\max_{g1}(g_1+g_2)^a x_1^{1-a}$$
$$s.t.\ g_1+x_1=w_1$$
$$g_1\ge 0$$
$$g_1=\max\{a(w_1+g_2)-g_2,\ 0\}$$

$$\begin{cases} g_1=\max\{a(w_1+g_2)-g_2,\ 0\} \\ g_2=\max\{b(w_2+g_1)-g_1,\ 0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_1&=\max\{aw_1-(1-a)[b(w_2+g_1)-g_1],\ 0\} \\ &=\max\{aw_1-(1-a)bw_2+(1-a)(1-b)g_1],\ 0\} \end{aligned}$$

$$a(1-b)g_1=aw_1-(1-a)bw_2$$

$$g_1=\frac{aw_1-(1-a)bw_2}{a(1-b)}$$

$$\begin{cases} g_1=\dfrac{aw_1-(1-a)bw_2}{a(1-b)} \\ g_2=\dfrac{bw_2-(1-b)aw_1}{b(1-a)} \end{cases}$$

上式结果表明对公共物品偏好愈强，提供量愈大；财富高于他人愈多供应量愈大。

## 第六节　投票

**投票均衡：**能使多数人既不喜欢更多也不喜欢更少的公共物品的数量。一般地，如果多数人不想改变投票结果，则该结果为投票均衡。

**投票悖论：**任何结果都会受到多数人反对，不存在投票均衡的情况。例如，三人决定公共物品提供量，提供公共物品的偏好顺序如表所示，其他提供量的偏好都排在第四以后，此例中不存在投票均衡

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| A | 第一 | 第二 | 第三 |
| B | 第三 | 第一 | 第二 |
| C | 第二 | 第三 | 第一 |

**鲍恩规则：**所有当事人同意以下规则：在各人均摊公共物品成本的条件下，报告自己选择的

公共物品提供量，由中间当事人报告的数量为准。

**鲍恩均衡：**由鲍恩规则形成的均衡。上表中的鲍恩均衡为 2 单位公共物品。

考虑中间消费者的最优化问题

$\max_G u_m(G)-G/n$

$u_m'(G_b)=1/n$

为考察鲍恩均衡是不是有效均衡，考虑社会福利最大化问题

$\max_G \sum_{j=1}^{n} u_j(G)-G \qquad \sum_{j=1}^{n} u_j'(G_e)=1$

综合两个一阶条件得到

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j'(G_e)=u_m'(G_b)$$

如果在任何 G 水平上有人均支付意愿等于中间消费者支付意愿，则鲴恩均衡是有效的，否则无效。例如，如果人均支付意愿大于中间消费者支付意愿，则鲍恩均衡提供的数量偏低。这是因为边际效用函数是减函数，如果

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j'(G)>u_m'(G)$$

要使得二者相等必须使左端的 G 增大和（或）右端的 G 缩小。

例子：鲍恩规则：中间投票人决定公共物品提供量。

鲍恩均衡是下列最优化问题解

$\max_G b_m \ln G-G/n$

$G_m=nb_m$

有效提供量是下列最优化问题的解

$\max_G \sum_{j=1}^{n} u_j(G)-G=\sum b_j \ln G-G$

$G_e=\sum b_j$

因此，$G_e>G_m$ ，当且仅当$\frac{1}{n}\sum b_j>b_m$

## 第七节　林达尔配置

**林达尔价格**是指维持公共物品有效配置的市场模仿价格。

假定政府向消费者 i 出售公共物品中，价格 pi 由由政府决定，购买量由私人决定则：

$\max_{xi,G} u(G,x_i) \quad s.t.\ x_i+p_iG$

这一最优化问题的解函数$G_i(p_i,w_i)$是消费者 i 对公共物品的需求函数。其中的 $p_i$ 称为为林达尔价格，它满足

$$p_i=\frac{\partial u_i(G^*,x_i^*)/\partial G}{\partial u_i(G^*,x_i^*)/\partial x_i}$$

据上式，消费者的林达尔价格之和等于公共物品的边际成本，既$\sum p_i=1$，是公共物品提供的最优条件，满足萨缪尔森原则。也满足成本分摊，因为$\sum p_i=1$。政府可以用“税收”的形式收取税金 $p_iG$，pi 称林达尔价格，林达尔价格也叫林达尔税。

这一配置是有效的，但它不可操作。这要求消费者报告每一购买量下的边际支付意愿，因为成本分摊比率就是报告的支付意愿，理性人都将低报。

## 第八节　格罗夫斯-克拉克需求显示机制

市场机制和投票机制都不能提供有效公共物品数量。林达尔配置有效但当事人不说实话。格罗夫斯-克拉克机制能诱导当事人说实话，正确显示对公共物品的需求。

机制：

1、当事人报告对一离散公共物品的剩余 $b_i$，报告值可以是也可能不是真实的剩余，真实的剩余为$v_i = r_i - s_i G$。

2、如果报告的剩余之和$\sum b_i$大于零就提供公共物品，否则不提供。

3、如果提供公共物品，每人得到一份额外支付，其数量为他人的剩余之和；如果不提供公共物品，额外支付为零。因此，
当事人 i 的最终净利益为

$$S = \begin{cases} v_i + \sum_{j \neq i} b_j, & if \quad b_i + \sum_{j \neq i} b_j \geq 0 \\ 0 & if \quad b_i + \sum_{j \neq i} b_j < 0 \end{cases}$$

克拉克机制下所有人说真话是唯一的纳什均衡。因为给定他人的任何报价，参与人 i 说实话是一个占优战略，不论他人报价使得我的最终净利益是正还是负。如果我的净利益为正，说真话（报告 $b_i=v_i$）可以保证公共物品等到提供，不需要将夸大报告值，更不能低报；如果我的净利益为负，说真话可以使所有人报告值之和为负，能确保公共物品不会提供，低报无必要，高报可能反受其害。

以上机制有两大缺陷。一是不能防止串谋（这是静态博弈，同时行动是假定前提，串谋不满足这一前提。），二是额外支付可能太大。对于后者有以下方法弥补。

额外支付的基础上再加上一个额外支付，额外额外支付函数仅仅依赖于他人的行为而与自己的行为无关。一个较好的函数如下

$$h_i(b_{-i}) = \begin{cases} -\sum bj & if \ \sum bj \geq 0 \\ 0 & if \ \sum bj < 0 \end{cases}$$

当事人 $i$ 的最终净利益为：$S = \begin{cases} v_i & if \ \sum b_i \geq 0 \ and \ \sum b_j \geq 0 \\ v_i + \sum b_j, & if \ \sum b_i \geq 0 \ and \ \sum b_j < 0 \\ -\sum b_j & if \ \sum b_i < 0 \ and \ \sum b_j \geq 0 \\ 0 & if \ \sum b_i < 0 \ and \ \sum b_j < 0 \end{cases}$

该机制对关键人物征税。关键人物是由于他的出现而改变公共决策的人物。征税的数量等于由于他的存在造成的对他人的损害，既$\sum bj = \sum vj$的绝对值，这一税收以克拉克税而知名。在克拉克机制下所有人说实话是一个弱优势策略。将其他人当作一个整体，实际上参与人 i 是在与该整体博弈。在给定参与人 i 评价的条件下，他人整体的选择导致 4 种可能的结果，如支付矩阵所示。该参与人有三种选择，实报、高报和低报。显然，与实报相比，不论高报还是低报，都有可能受损，而不会带来任何利益。

| | $v+\sum bj > 0$ | $v+\sum bj < 0$ |
|---|---|---|
| $v$ | $v+\sum bj > 0$ | 0 |
| $v+a$ | $v+\sum bj > 0$ | 0 or $v+\sum bj < 0$ |
| $v-a$ | $v+\sum bj > 0$ or 0 | 0 |

| | $v+B>0,B>0$ | $v+B>0,B<0$ | $v+B<0,B>0$ | $v+B<0,B<0$ |
|---|---|---|---|---|
| *实报* | $v$ | $v+B$ | $-B$ | $0$ |
| *高报* | $v$ | $v+B$ | $-B$ or $v$ | $0$ or $v+B$ |
| *低报* | $v$ or $-B$ | $v+B$ or $0$ | $-B$ | $0$ |

串谋可以使关键人物变为非关键人物，可以逃税，这时克拉克机制失效。

## 第九节　连续物品的需求显示机制

现在要求报告价值函数（剩余函数）。假定成本负担份额为 $s_i$，与报告的价值函数无关。参与人 $i$ 的价值函数为

$$v_i(G)=u_i(G)-s_iG$$

根据规则参与人 $i$ 得到的额外支付为 $\sum b_j(G)$，无论他自己报告的价值函数 $b_i(G)$是什么，参与人 $i$ 总是最大化下列函数而与自己的报告函数无关。

$$\max v_i(G)+\sum b_j(G) \qquad (9.1)$$

政府最大化下列函数，它与参与人 $i$ 的报告函数有关。

$$\max b_i(G)+\sum b_j(G) \qquad (9.2)$$

显然，说真话是最优的：说真话意味着政府为参与人 $i$ 做出最大化选择，政府将最大化（9.1）式。

由于额外支付可能太大，恰当地选择额外额外支付 $-\sum b_j(G_j*)=-\max_G \sum b_j(G)$，这样 $i$ 的净利益为

$$v_i(G)-\left(\sum b_j(G_j*)-\sum b_j(G_i*)\right)$$

克拉克税为 $\sum b_j(G_j*)-\sum b_j(G_i*)\geq 0$，$G_j$*为他人总体最优提供量，是（9.2）式第 2 项的最优解。$G_i$*为包括参与人 $i$ 在内的的所有人总体最优提供量，它由（9.2）式给出。克拉克税正是参与人 $i$ 的出现把提供量从 $G_j$*改变到 $G_i$*造成的对他人的伤害。连续情况下几乎所有人都存在一个正的克拉克税。克拉克税为零，当且仅当他的出现不改变公共物品提供量。加入额外额外支付后任何人只有可能被征税，绝对得不到任何补贴。

# 第二十四章　外部性



**基本概念**

外部性：当一个当事人的行为直接影响另一个当事人的环境时，我们就说存在外部性。
根据行为的不同分为：消费外部性和生产外部性。
根据影响的好坏分为：

正外部性；使另一个当事人的环境改善。

负外部性：使另一个当事人的环境恶化。

在本章中，我们讨论争外部性对经济的影响。我们会发现存在外部性时市场均衡一般是低效率的，福利经济学第一定理不成立。这就自然引出了应该如何解决外部性问题，使资源的配置富有效率。

## 第一节　生产外部性的一个例子

假定：（1）两个企业。企业 1 在竞争性市场中生产和出售 $x$，价格为 $p$。

（2）$x$ 的生产技术为，产生 $x$ 单位的污染才能制造出 $x$ 单位的产出，并且污染损害了企业 2。

（3）企业 1 的生产给企业 2 造成负外部性，设 $x$ 的生产给企业 2 造成的成本为 $e(x)$。

（4）成本函数与通常的一样，是递增且凸的。

两个企业的利润由下式给出：$\begin{cases}\pi_1 = \max\limits_x : px - c(x) \\ \pi_2 = -e(x)\end{cases}$

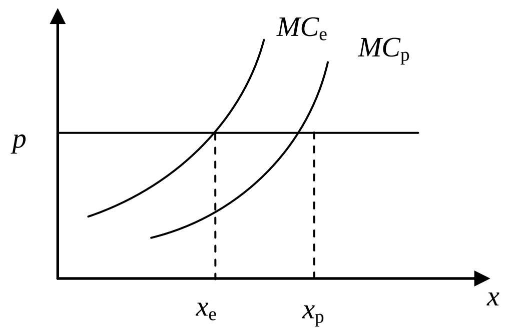
考虑私人最优化行为，企业 1 的均衡产量为 $x_p$，它由一阶条件 $p = c'(x_p)$ 给出，即价格等于私边际成本。

考虑社会最优化行为，将两个企业的利润函数联合起来得到社会利润函数：

$$\pi = \max_x : px - c(x) - e(x)$$

对于整个社会的有效产量或最优产量为 $x_e$，它由一阶条件 $p = c'(x_e) + e'(x_e)$ 给出，即价格等于社会边际成。

比较两个一阶条件，$c'(x_e) + e'(x_e) = c'(x_p)$。因为成本函数递增且凸。所以，$x_e < x_p$。即企业 1 因为只考虑自己的私人成本，而不考虑自己给他人造成的成本，私人成本低于社会成本，所以，其私人产出高于整个社会所要求的有效产出水平。从而使福利经济学第一定理不成立了。所以，外部性导致了低效率。其情形如下图所示：




## 第二节　外部性问题的解决方案

由第一节可知外部性导致了低效率（正外部性同样也导致低效率），如何解决，理论上有以下几种方案。

### 一、庇古税

目的：为纠正企业 1 对于整个社会来说的错误行为，通过征税的方式，加大私人成本，从而使其产出水平符合社会的要求。这种税就叫庇古税。

假定政府对企业 1 征收一个产量税 t，其最大化行为由下式给出：

$$\pi_1 = \max_x : px - c(x) - tx$$

一阶条件为： $p = c'(x_p) + t$

在这种情况下，我们可以令 $t = e'(x)$，这就可以使企 1 选择 $x_p = x_e$，使问题得以解决。在图形上就是通过征税的方法，使 $MC_p$ 线上移到 $MC_s$ 位置，从而使其产出水平减少到 $x_e$。

这一解决方式虽然理论上可行，但在实践上要求税务当局准确了解外部性成本函 e(x)。这通常税务当局做不到。退一步，如果税务当局能做到这一点的话，那就意味着税务当局确切知道 $x_e$ 是多少，那么，税务当局直接要求企业生产这么多就可以了，没必要再征税了。

### 二、污染交易市场

在上面例子中，虽然企业 2 关心企业给自己造成的污染，但企业 2 又没有办法影响企 1 的行为。现在解决这种外部性的另一种思路是设计一个污染交易市场，使企业 2 能够表达污染需求意愿，从而解决此外部性问题，实现有效配置。

如果污染在这一市场上的价格为 $r$（注意 $r$ 为负，因为污染是坏事而非好事，即负效用）。如果生产 $x$ 单位产出仍不可避免地造成 $x$ 单位的污染。那么企业就会根据 $r$ 决定卖多少污染（$x_1$），企业 2 也同样会根据 $r$ 决定购买多少污染（$x_2$）。双方的利润最大化行为变为：

$$\begin{cases} \pi_1 = \max\limits_{x_1} : px_1 + rx_1 - c(x_1) \\ \pi_2 = \max\limits_{x_2} : -rx_2 - e(x_2) \end{cases} \quad \text{一阶条件为：} \begin{cases} p + r = c'(x_1) \\ -r = e'(x_2) \end{cases}$$

当这一污染市场供求平衡时，即 $x_1 = x_2$。在这种情况下，此一阶条件与有效产量的一阶条件 $p = c'(x_e) + e'(x_e)$ 是一样的。从而这种方式同样可以解决外部性问题。

更为一般的情况是，污染与产出并不一定是一对一的比例产生。假如企业 1 生产 $x$ 单位的产出会造成 $y$ 单位的污染。此时企业 1 的成本函数为 $c(x,y)$ 且 $c'_x > 0$， $c'_y < 0$。

当没有污染交易市场时，企业 1 的最优行为是：

$$\pi_1 = \max_{x,y} : px - c(x,y),$$

一阶条件为： $\begin{cases} p = \dfrac{\partial c(x,y)}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial c(x,y)}{\partial y} \end{cases}$

由此一阶条件可以看，企业 1 的最优化行为将使其产出的价格等于产出的边际成本，污染的价格等于污染的边际成本。在本例中污染的价格为 0。所以，企业 1 的最优行为是在其生产成本最小化的点的进行生产。

现在我们为污染设立一个市场。仍令 $r$ 为单位污染的价格，$y_1$ 为企业 1 对污染的供给；$y_2$ 为企业 2 对污染的需求。双方的最优化问题为：

$$\begin{cases} \pi_1 = \max\limits_{x_1,y_1} : px + ry_1 - c(x,y_1) \\ \pi_2 = \max\limits_{y_2} : -ry_2 - e(y_2) \end{cases}$$

一阶条件为： $\begin{cases} p = \dfrac{\partial c(x,y_1)}{\partial x} \\ r = \dfrac{\partial c(x,y_1)}{\partial y_1} \\ -r = \dfrac{\partial e(y_2)}{\partial y_2} \end{cases}$

当污染市场供求平衡时，即 $y_1 = y_2$。由上面一阶条件可以得到 $x$、$y$ 的有效水平。

从上述分析可以有以下启示：

（1）产权（污染权）变的无所谓了。只要有一个污染的交易市场，并且如果这里污染的交易没有成本的话，双方会自动在这一市场上达成交易，最终的结果是有效的。

（2）这个市场所发挥的作用其实是一种补偿机制在发挥作用。即企业 1 污染了企业 2，给企业 2 造成了损害，所以，企业 1 应该补偿企业 2，$r$ 就是企 1 生产每单位的污染给企业 2 所做的补偿。

（3）这个市场的作机制也包含了内部化的思想。我们可以把企业 1 向企业 2 的进行的补偿看成是一种收购行为。也是企业 1 可以支付足够的数额以买下企业 2。这种收购过程也就是外部影响内部化的过程。在这一过程中企业 1 的规模在逐步扩大，如果规模可以扩大到足够大，就可以将所有外部影响内部化，使外部性问题得到有效解决。但这种内部化的方式并非对所有类型的外部性问题都奏效。对上例生产外部性问题这种内部化方式是有效的，但对消费外部性问题就不行，因为没有办法去购买消费者。对公共物品的外部性问题也不行，因为公共物品在影响所有的社会主体，包括所有企业和个人，也没有办法收购。

## 第三节　补偿机制

这一节主要是针对庇古税中对污染成本信息不对称的问题。税务当局不能确切地知道企业 1 的污染对企业 2 所造成的损害究竟有多大，所以，没有办法制定有效的税率，从而没有办法有效解决外部性问题。但是，企业 1 可能比较清楚自己给企业 2 所造成的损害，但企

业 1 不可能将其准确地告诉税务当局。如果是这样，那么我们就需要设计一种机制，使企业 1 正确显示其给企业 2 所造成的损害，从而有效解决外部性问题。

这一机制设计如下：

第一阶段：宣布阶段。企业 1 宣布庇古税 $t_1$，企业 2 宣布庇古税 $t_2$。$t_1$、$t_2$ 可以是也可以不是庇古税的有效水平。

第二阶段：选择阶段。如果企业 1 生产 $x$ 单位的产出，那么它必须交 $t_2x$ 的税，并且企业 2 获得 $t_1$x 数量的补偿。另外，每一企业根据它们所宣布的两个税率的差额再交一份罚金。

假定产出与污染是1:1的。

两个企业的利润由下式给出：$\begin{cases}\pi_1=\max\limits_x : px-c(x)-t_2x-(t_1-t_2)^2 \\ \pi_2=t_1x-e(x)-(t_2-t_1)^2\end{cases}$

（罚金的具有形式不重要，重要的是当 $t_1$=$t_2$ 时它为 0， $t_1 \neq t_2$ 时它为正）

首先分析企业 1 的行为，给定 $t_2$，由其利润函数可得一阶条件：

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x}=0 \Rightarrow p=c'(x)+t_2 ------------------(1)$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial t_1}=0 \Rightarrow t_1=t_2 ----------------------(2)$$

即在给定 $t_2$ 的情况下，企业 1 必然选择 $t_1$=$t_2$，并且，由 $t_2$ 确定最优产量 $x(t_2)$。显然 $x'(t_2)<0$，即被征的税越多则产出水平越低，被征的税越少则产出水平越高。

再考虑企业 2 的行为，给定 $t_1$，且考虑 $x(t_2)$，由其利润函数可得一阶条件：

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial t_2}=t_1x'(t_2)-e'(x)x'(t_2)-2(t_2-t_1)=0$$

$$\Rightarrow [t_1-e'(x)]x'(t_2)-2(t_2-t_1)=0$$

显然，当 $t_1$=$t_2$ 时， $t_1=e'(x)$，即： $t_1=t_2=e'(x)$，代入（1）式可得：

$p=c'(x)+e'(x)$，即对于产出的有效条件。

由上述过程可以看到，这一方案是通过为双方设立相反的激励，从而有效解决外部性问题。

这一机制对于企业 1 来说，他要想实现利润最大化，就应该与企业 2 宣布相同的税率，即 $t_1$=$t_2$。

这一机制对于企业 2 来说，他知道他所宣布的 $t_2$ 会影响到企业 1 的产出水平 $x$，并且当 $x$ 能使 $t_1=e'(x)$ 时，对自己是最优的，并且罚金为 0。所以，在企业 2 宣布 $t_2$ 时就会事先考虑到这一点。所以，他也不会乱报 $t_2$。相反，如果没有这一惩罚机制，企业 2 就会乱报。如果他认为企业 1 将提议给他一个较高的补偿率，即 $t_1$ 较大时，比如 $t_1>e'(x)$，那么，他就希望对企业 1 少征税，即宣布一个尽可能低的 $t_2$，以使企业能更多地生产，企业 1 生产的越多，对企业 2 补偿的就越多。如果他认为企业 1 将提议给他一个较低的补偿率，即 $t_1$ 较小时，

比如$t_1 < e'(x)$，那么，他就希望对企业 1 多征税，即宣布一个尽可能高的 $t_2$，以使企业能更少地生产。但一旦有了这一惩罚机制，他的利润就不仅取决于补偿和污染损害，还取决于 $t_2$ 与 $t_1$ 的差额。这时的他行为会自动改变，根据$t_2 = t_1 = e'(x)$来宣布 $t_2$。

## 第四节　消费外部性的效率条件

前面分析的是生产外部性的效率条件，下面讨论消费外部性的效率条件。

**假定：**

（1）一个“$2\times2$”的经济，两个消费者 1、2，两种物品，$x$、$y$。

（2）两个人在 $x$ 物品消费上存在外部性，而在 $y$ 物品的消费上没有外部性。即 $u_1$ 受 $x_2$ 的影响，但不受 $y_2$ 的影；$u_2$ 受 $x_1$ 的影响，但不受 $y_1$ 的影响。

（3）总的 $x$ 和 $y$ 的数量既定，分别为$\bar{x}$、$\bar{y}$。

**最优化问题如下：**

$$\begin{cases} \max\limits_{x_i, y_i}: \ au_1(x_1, x_2, y_1) + bu_2(x_1, x_2, y_2) \\ st: \ x_1 + x_2 = \bar{x}; \quad y_1 + y_2 = \bar{y} \end{cases}$$

建立拉格朗日函数：

$$L = au_1(x_1, x_2, y_1) + bu_2(x_1, x_2, y_2) + \lambda(\bar{x} - x_1 - x_2) + \mu(\bar{y} - y_1 - y_2)$$

一阶条件：$\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow a\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + b\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = \lambda$ ----------------------------------（1）

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow a\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + b\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \lambda \text{ ----------------------------------（2）}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow a\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \mu \text{ ---------------------------------------------（3）}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = 0 \Rightarrow b\frac{\partial u_2}{\partial y_2} = \mu \text{ ---------------------------------------------（4）}$$

由（3）式得$a = \dfrac{\mu}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}$；由（4）式得$b = \dfrac{\mu}{\frac{\partial u_2}{\partial y_2}}$，代入（1）（2）式并整理得：

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial y_2}} = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial y_2}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

即，消费外部性的效率条件为边际替代率之和等于一个常数。

从效率条件可以看出，从整个社会角度考虑，判断当事人 1 是否应该增加物品 x 的消费时，不仅要考虑他愿意为此愿意支付多少（即当事人 1 的边际替代率），还要考虑当事人 2

的愿意为此支付多少（即当事人 2 的边际替代率）。这实质上对公共物品的效率条件是一样的（公共物品是种特殊的外部性问题）。

从效率条件也可以看出，如何将消费外部性内部化。为做到这一点，我们可以直接将 $x_1$ 和 $x_2$ 看成两种商品，并设 $x_1$ 的价格为 $p_1$，$x_2$ 的价格为 $p_2$。

考虑当事人 1 的最优化问题:

$$\begin{cases} \max\limits_{x_i, y_1}: \ u_1(x_1, x_2, y_1) \\ \quad st: \ p_1x_1 + p_2x_2 + p_y y_1 = w_1 \end{cases}$$

建立拉格朗日函数：

$$L = u_1(x_1, x_2, y_1) + \lambda(w_1 - p_1x_1 - p_2x_2 - p_y y_1)$$

可得一阶条件：$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = \lambda p_1$；$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = \lambda p_2$；$\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} = \lambda p_y$

同理考虑当事人 2 的最优化问题可得一阶条件：$\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = \mu p_1$；$\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \mu p_2$；$\dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} = \mu p_y$

注意在竞争性市场当中他们所支付的价格是一样的，且没有能力影响价格，价格为常数。所以：

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_2}{\partial y_2}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_y} + \frac{\mu p_1}{\mu p_y} = \frac{2p_1}{p_y} \text{--------为常数}$$

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial y_2}} = \frac{\lambda p_2}{\lambda p_y} + \frac{\mu p_2}{\mu p_y} = \frac{2p_2}{p_y} \text{-------为常数}$$

所以，两个人独立决策所得出的效率条件与将两个人合并看成一个整体所得出来的效率条件是一样的，都为常数。将两个人合并也就是将外部影响内部化了。

# 第二十五章　信息



## 第一节　委托代理问题

典型的委托代理问题是一个四阶段系列博弈。第一阶段，委托人选择是否委托。第二阶段，在选择委托的条件下，委托人设计一种机制以吸引代理人接受委托，并激励代理人在接受委托后采取在委托人看来最好的行动，以实现委托人的预期支付最大化。第三阶段，代理人决定是否接受委托。第四阶段，在接受委托的条件下，代理人决定采取对自己最有利的行动以使预期支付最大化。

## 第二节　完全信息：垄断解

假定：信息是完全的，代理人只有两种可选择的行动且第 2 种行动是委托人所希望的，代理人机会成本既定，生产函数与劳动辛苦成本已知。

博弈分析：

$$v = \max_{b,s()} x(b) - s(x(b))$$
$$s.t.\ s(x(b)) - c(b) \ge \bar{u}$$
$$s(x(b)) - c(b) \ge s(x(a)) - c(a)$$

为满足参与约束，　$s(x(b)) = c(b) + \bar{u}$

为满足激励约束，只要处罚足够大，如 $s(x(a)) = -\infty$

因此合约为　$s = \begin{cases} c(b)+\bar{u} & if \quad 行动 = b \\ -\infty & if \quad 行动 = a \end{cases}$

合同形式选择：

1 雇佣制：支付给代理人固定工资，其数量为 *c(b)+u*

2 租赁制：支付给委托人租金，其数量为 *F=x(b)- c(b)-u*

效率或福利：满足帕累托效率条件，因为不存在帕累托改进。

如果代理人的行动是连续变量，则代理人通过共同支付最大化求解最优行动 $a^*$。

## 第三节　完全信息：竞争解

与垄断不同的是在这里参与约束不起作用，零利润约束替代参与约束

$$v=\max_{b,s()}\ x(b)-s(x(b))$$
$$s.t.\ x(b)-s(x(b))=0$$
$$s(x(b))-c(b)\geq s(x(a))-c(a)$$

在线性合同 $s(x)=x-F$ 下，F=0。如存在固定成本则 F=固定成本。

## 第四节　隐蔽活动：垄断解

假定有 n 种可能的产出，代理人的行动能够影响各种产出出现的概率。委托人是风险中性的，代理人是风险规避的。下面分三种情况。

**一、不完全信息，行动可直接观察。**

$$v=\max_{a,s()}\sum\ x_i(b)\pi_i-s(b)$$
$$s.t.\ u(s(b))-c(b)\geq 0$$
$$s(b)-c(b)\geq s(a)-c(a)$$

其结果与完全信息类似，激励相容约束无关紧要，只要惩罚足够大。

**二、不完全信息，隐蔽行动，假定不存在激励问题**

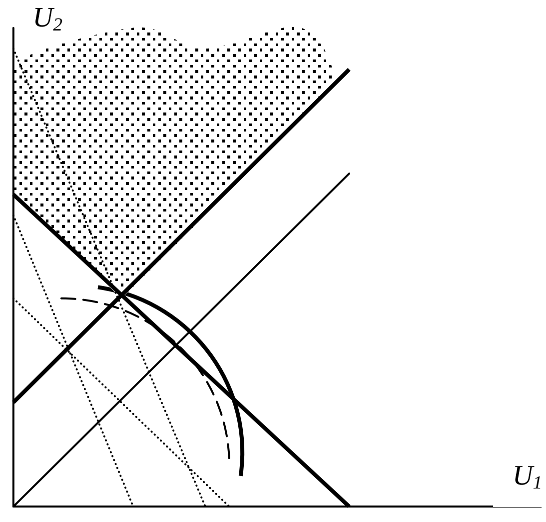
$$v=\max_{si}\sum(x_i-s_i)\pi_{ib}$$
$$s.t.\sum\ u(s_i)\pi_{ib}-c_b=0$$
$$-\pi_{ib}+\lambda u'(s_i)\pi_{ib}=0$$
$$u'(s_i)=1/\lambda$$

因此代理人报酬与状态 $i$ 无关，是一常数，这是完全保险。

**三、不完全信息，隐蔽行动，考虑激励问题**

因此委托人的预期利润为：

$$v=\max_{si}\sum(x_i-s_i)\pi_{ib}$$
$$s.t.\sum\ u(s_i)\pi_{ib}-c_b=0$$
$$\sum\ u(s_i)\pi_{ib}-c_b\geq\sum\ u(s_i)\pi_{ib}-c_b$$




考虑效用函数 $u_i=u(s_i)$ 的反函数 $s_i=f(u_i)$，它是递增的凸函数，这一点可以证明如下：

$$s_i\equiv f(u_i(s_i))$$
$$1=f'u'$$
$$f'=1/u'>0$$
$$0=f'u''+f''u'^2$$
$$f''=-f'u''/u'^2>0$$

现在效用最大化问题为：

$$v=\max_{si}\sum(x_i-f(u_i))\pi_{ib}$$
$$s.t.\sum\ u_i\pi_{ib}-c_b\geq 0$$
$$\sum\ u_i\pi_{ib}-c_b\geq\sum\ u_i\pi_{ia}-c_a$$

考虑两种状态 1 和 2（坏结果 1 和好结果 2，假定一阶随机占优条件成立，那么对于 $b>a$ 有 $\pi_{2b}>\pi_{1b}$　$\pi_{2a}<\pi_{1a}$），在状态空间中画出激励相容集和参与集。行动 b 下参与约束线的斜率为 $du_2/du_1=-\pi_{1b}/\pi_{2b}$，行动 $a$ 下参与约束线的斜率为 $du_2/du_1=-\pi_{1a}/\pi_{2a}$。显然后一条线较

陡。

行动 b 下激励线斜率为 $du_2/du_1=(\pi_{1a}-\pi_{1b})/(\pi_{2b}-\pi_{2a})=1$，因为 $\pi_{1a}+\pi_{2a}=\pi_{1b}+\pi_{2b}=1$。激励线方程为：

$$u_2=u_1+\frac{c_b-c_a}{\pi_{2b}-\pi_{2a}}$$

激励相容线恰是行动 *a* 下无差异线和行动 *b* 下的无差异线的交点集。

$$L=\sum(x_i-f(u_i))\pi_{ib}+\lambda[\sum u_i\pi_{ib}-c_b]+\mu[\sum u_i\pi_{ib}-c_b-\sum u_i\pi_{ia}+c_a]$$
$$-f'(u_i)\pi_{ib}+\lambda\pi_{ib}+\mu(\pi_{ib}-\pi_{ia})=0$$

$$f'(u_i)=\lambda+\mu(1-\pi_{ia}/\pi_{ib})$$

如果激励约束不起作用，则 μ=0，效用水平与状态无关从而代理人报酬与状态无关，这是完全保险。在什么情况下激励约束不起作用，将效用水平为常数的结果代入激励约束

$$\bar{u}\sum\pi_{ib}-c_b\geq\bar{u}\sum\pi_{ia}-c_a$$
$$c_a>c_b$$

这意味着代理人自动选择行动 b，从而与委托人的目标一致时激励约束是多余的。

似然比常用来推断代理人的行为。如果观察到高产出 x2，则似然比较低，这是因为代理人选择了行动 b。因此如果单调似然比性质成立（一阶随机占优条件成立），则似然比是产出的单调减函数。进一步可以推断 s(x)将是减函数。

胡萝卜与大棒。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial c_a}=\mu\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial c_b}=-(\lambda+\mu)\end{cases}$$

大棒---提高行动 *a* 的成本放松了激励约束，给委托人制定激励方案带来便利。胡萝卜---降低行动 *b* 的成本放松了两个约束，给委托人在制定激励方案和制定参与方案上都带来便利，因此能够更多地增加委托人的福利。

$$dv=-\mu\sum u_i d\pi_{ia}=-\mu d(E\tilde{u})$$

行动 *a* 的概率分布变化使得委托人与代理人的利益相冲突，如果使代理人变好则必使委托人变坏。

例子：均值方差效用委托---代理模型

$$\begin{cases}s(\tilde{x})=g+t\tilde{x}\\\tilde{x}=a+\tilde{e}\\\tilde{e}\sim N(0,\sigma^2)\\u(w)=-\exp(-rw)\\c=c(a)\quad c'(a)>0\quad c''(a)>0\end{cases}$$

代理人选择努力程度，从而导出激励相容约束

$$\max Eu[s(\tilde{x})]-c(a)\Leftrightarrow\max Es(\tilde{x})-\pi(\tilde{x})-c(a)=g+ta-0.5rt^2\sigma^2-c(a)$$
$$c'(a^*)=t\quad a^*=a(t)$$

委托人选择合同参数 *t* 与 *g*，或者选择 *a* 与 *g*

$$\max E[\tilde{x} - s(\tilde{x})] = a - (g + at)$$
$$s.t.\ \ g + at - 0.5rt^2\sigma^2 - c(a) = u$$
$$t = c'(a)$$
$$\max_a a - 0.5rc'^2(a)\sigma^2 - c(a)$$
$$1 - rc'c''\sigma^2 - c' = 0$$
$$t = \frac{1}{1 + rc''\sigma^2}$$

$$\max E[\tilde{x} - s(\tilde{x})] = a - (g + at)$$
$$s.t.\ \ g + at - 0.5rt^2\sigma^2 - c(a) = u$$
$$t = c'(a)$$
$$\max_a a(t) - 0.5rt^2\sigma^2 - c(a(t))$$
$$a'(t) - rt\sigma^2 - c'(a)a'(t) = 0$$
$$t = \frac{a'(t)}{a'(t) + r\sigma^2} = \frac{1}{1 + r\sigma^2 c''(a)}$$

代理成本

1、 风险成本。帕累托最优风险分担无法实现的福利损失。
2、 激励成本。低努力导致的产出损失与努力成本节约之差。
例子：上例中的代理成本
风险成本为代理人的风险金（委托人是风险中性的，风险金为零），即

$$c_1=\frac{1}{2}rt^2\sigma^2=\frac{1}{2}\frac{r\sigma^2}{(1+rc''\sigma^2)^2}$$

如果行动可以直接观察到，激励约束不起作用，委托人支付一个固定工资 g，满足参与约束 *g-c(a)=u*，委托人直接规定努力水平，最优化问题为

$$\max E\tilde{x}-g=a-u-c(a)$$
$$c'(a^*)=1$$

假定努力成本函数为 $c=0.5a^2$，则 $a^*=1$。在行动不可观察情况下

$$c'(a)=t=\frac{1}{1+rc''\sigma^2}$$ 所以

$$a=\frac{1}{1+r\sigma^2}$$ 。因此预期产出损失为

$$\Delta E\tilde{x}=a^*-a=1-\frac{1}{1+r\sigma^2}=\frac{r\sigma^2}{1+r\sigma^2}$$

努力成本节约为

$$c(a^*)-c(a)=0.5(a^{*2}-a^2)=0.5(a^*-a)(a^*+a)=0.5(1-a)(1+a)$$

激励成本为

$$c2=1-a-0.5(1-a)(1+a)=(1-a)(1-0.5(1+a))=0.5(1-a)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{r\sigma^2}{1+r\sigma^2}\right)^2$$

总代理成本为

$$c1+c2=\frac{1}{2}\frac{r\sigma^2}{(1+r\sigma^2)^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{r\sigma^2}{1+r\sigma^2}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{r\sigma^2}{1+r\sigma^2}$$

**充分统计量：**如果没有其他变量反应努力水平的信息，那么产出就是反应努力水平的充足统计量。现在考虑其他变量 z，它与努力水平不相关，但可能与产出 x 相关（可能是共同受到自然人影响等），假定 z 且有 0 均值且方差为 $\sigma_z{}^2$ 。考虑线性合同

$$s(x,z)=g+t(x+bz)$$

代理人的确定性性等价收入为

$$g+at-0.5rt^2\,\mathrm{var}(x+bz)-0.5a^2$$
$$=g+at-0.5rt^2(\sigma^2+b^2\sigma_z{}^2+2b\,\mathrm{cov}(x,z))-0.5a^2$$

一阶条件为 $a=t$ ，$b$ 不影响努力选择，因为 $z$ 与 $a$ 不相关。委托人的问题是

$$\max_{g,a,b,t} E[\tilde{x} - s(\tilde{x},\tilde{z})] = a - g - at$$

$$s.t.\quad g + at - 0.5rt^2(\sigma^2 + b^2\sigma_z^{\ 2} + 2b\operatorname{cov}(x,z)) - 0.5a^2 \ge 0$$

$$a = t$$

或者

$$\max_{b,t} t - 0.5rt^2(\sigma^2 + b^2\sigma_z^{\ 2} + 2b\operatorname{cov}(x,z)) - 0.5t^2$$

$$\begin{cases} 1 - rt(\sigma^2 + b^2\sigma_z^{\ 2} + 2b\operatorname{cov}(x,z)) - t = 0 \\ b\sigma_z^{\ 2} + \operatorname{cov}(x,z)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \operatorname{cov}(x,z)/\sigma_z^{\ 2} \\ t = 1/[1 + r(\sigma^2 - \operatorname{cov}(x,z)/\sigma_z^{\ 2})] \end{cases}$$

含义Ⅰ： 如果 *z* 与 x 不相关，*x* 是充足统计量，*z* 不提供有关 *a* 的任何任何信息，因此 *b=0*，*z* 不进入合同。

含义Ⅱ：z 与 x 正相关，则 b<0。这时如果 z>0 意味着有利的外部环境，较高的产出至少部分是因为好运气而不全是因为努力，应该在单纯产出报酬合同的基础上扣除运气部分 *tbz*。

含义Ⅲ：不论 x 与 z 正相关还是负相关，将 z 写入合同可以提高代理人的剩余索取份额，从而提高激励。

含义Ⅳ：只要 *x* 与 *z* 相关，将 *z* 写入合同可以降低代理成本。

$$\operatorname{var}(s(x,z)) = t^2[[\sigma^2 + b\sigma_z^{\ 2} + 2b\operatorname{cov}(x,z)]$$

$$= \frac{\sigma^2 - \operatorname{cov}^2(x,z)/\sigma_z^{\ 2}}{[1 + r(\sigma^2 - \operatorname{cov}(x,z)/\sigma_z^{\ 2})]^2}$$

## 第五节 隐蔽行动：竞争市场

- 参与约束不起作用。
- 完全保险合同不是一个均衡。
- 部分保险合同均衡可能存在（图 3a），可能不存在（图 3b）。

例子：保险市场的道德风险

坏结果发生的概率为 p，这时可能损失 L。具有初始财富 W。保险费率为 t，购买 q 元的保险。

1、不存在道德风险问题，激励约束不起作用，另外参与约束自动满足（如果选择 q=0 就得到保留效用 $u_0$=pu(w-L)+(1-p)u(w)）。投保人选择投保数量以使预期效用最大化。

$$\max_q\ pu(w - L - tq + q) + (1-p)u(w - tq)$$

$$(1-t)pu'(w_1) = t(1-p)u'(w_2)$$

如果保险市场完全竞争，保险市场选择费率，t 由 0 利润条件决定。

$$p(tq - q) + (1-p)tq = 0$$

$$t = p$$

所以投保人将选择完全保险 q=L（由一阶条件），以使两种状态下效用水平相等。

2、如果保险市场是垄断的，则公司选择费率 t。

$$\max_t\ p(tq - q) + (1-p)tq = (t-p)q, \qquad s.t.\quad (1-t)pu'(w_1) = t(1-p)u'(w_2)$$

这里保险公司会提高 t，使之大于 p，从而消费者选择 q*<L，不会完全保险。最优风险分担不能实现（最优风险分担要求风险规避的一方不承担风险，风险由风险中性者承担）。

据一阶条件对 t 微分

$$-pu'(w1)+(1-t)pu''(w1)[(1-t)q'(t)-q]=(1-p)u'(w2)-t(1-p)u''(w2)[q+tq'(t)]$$

在 t=p,q=L 时

$$-pu'(W)+p(1-p)u''(W)[(1-p)q'(t)-q]=(1-p)u'(W)-p(1-p)u''(W)[q+pq'(t)]$$

$$-p(1-p)r(W)[(1-p)q'(t)-q]=1+p(1-p)r(W)[pq'(t)+q]$$

$$-p(1-p)r(W)q'(t)=1$$

$$q'(t=p)=-\frac{1}{p(1-p)r(W)}<0$$

$$dE\pi/dt\Big|_{\substack{t=p\\q=L}}=L+(t-p)q'(t)\Big|_{t=p}=L>0$$

3、假定保险市场仍是完全竞争。且如果损失发生的概率 p 是提防行动的减函数，满足一阶随机占优条件，则完全保险不再是最优的。最优费率与投保数量由 0 利润条件和激励约束决定。

$$\begin{cases} p(t^*-1)a^*+(1-p)t^*q^* \\ p_b u(w-t^*q^*+q^*-L)+(1-p_b)u(w-t^*q^*)-c=p_a u(w-t^*q^*+q^*-L)+(1-p_a)u(w-t^*q^*) \end{cases}$$

c 为提防行动的附加成本。这一模型的均衡可能不存在。

## 第六节 隐蔽信息：垄断（信号甄别或机制设计）

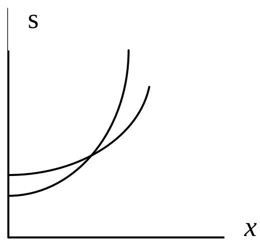
第一阶段，垄断者（无私人信息的一方）设计一个工资合同集。

第二阶段，不同类型的工人（有私人信息的一方）对号入座，从工资合同集中选择一个工资合同。

假定存在两种类型的工人，且满足单交叉性，即$c_2'(x)>c_1'(x)$。这意味着两种无差异线至多相交一次。

$$s_t-c_t(x)=u_t$$

$$s_t'(x)=c_t'(x)$$




因此在任何 $x$ 处高成本代理人的无差异线的斜率总是较大。

如果信息是完全的激励约束不起作用，假定参与约束为：$s_t-c_t(x_t)=0$。委托人的利润最大化问题如下

$$\max x_1+x_2-c_1(x_1)-c_2(x_2)$$

$$\begin{cases} c_1'(x_1)=1 \\ c_2'(x_2)=1 \end{cases}$$

如果信息是不完全的，则参与约束与激励约束分别如下：

$$\begin{aligned} &s_1\ge c_1(x_1)\\ &s_2\ge c_2(x_2)\\ &s_1-c_1(x_1)\ge s_2-c_1(x_2)\\ &s_2-c_2(x_2)\ge s_1-c_2(x_1) \end{aligned} \quad \text{......................（1）}$$

$$\begin{aligned} &s_1\ge c_1(x_1)\\ &s_1\ge c_1(x_1)+s_2-c_1(x_2) \end{aligned} \quad \text{......................（2）}$$

以上两个约束中只有一个是起作用的。事实上只有第二个约束起作用，这是因为

$$\begin{aligned} s_1&\ge c_1(x_1)+s_2-c_1(x_2)\\ &\ge c_1(x_1)+c_2(x_2)-c_1(x_2)\\ &\ge c_1(x_1) \end{aligned}$$

最后一步应用了单交叉性假定。由于（2）式中只有第二式起作用，且最大利润要求取等号。

$$s_1 = c_1(x_1) + s_2 - c_1(x_2)$$

（3）

同样，（1）式中的第二和第四式只有一个起作用。将（2）式代入（1）式中的第四式得

$$\begin{aligned} s_2 - c_2(x_2) &\ge s_1 - c_2(x_1) \\ &= c_1(x_1) + s_2 - c_1(x_2) - c_2(x_1) \end{aligned}$$

上式违背单交叉性假定，因此第二式是起作用的，取等号得

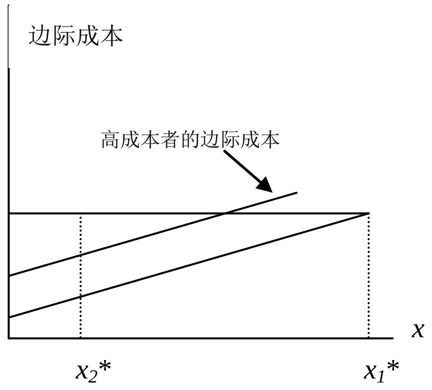
$s_2 = c_2(x_2)$ ........................................................................................................................（4）

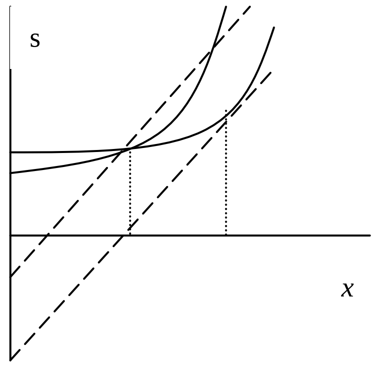
垄断者的利润最大化问题为

$$\max \sum \pi_t (x_t - s_t) = \pi_1 [x_1 - c_1(x_1) - c_2(x_2) + c_1(x_2)] + \pi_2 [x_2 - c_2(x_2)]$$

一阶条件为

$$\begin{cases} c_1'(x_1) = 1 \\ c_2'(x_2) = 1 + \dfrac{\pi_1}{\pi_2}[c_1'(x_2) - c_2'(x_2)] \end{cases}$$




* 如果高成本者的边际成本太高，垄断者将不雇用这类工人。
* 该模型的激励约束不是激励努力工作，而是激励每类工人对号入座，选择合同，因此该激励约束也称为自偏好约束。
* 该类进行信息筛选或诱导说实话的模型称信号甄别模型，或称机制设计模型。

## 第七节　隐蔽信息：竞争

随着厂商进入市场，它们哄抬工资，最终使利润为零。考虑对称均衡，所有厂商提供相同人合同。存在 3 种可能人合同。

1、 代表性厂商提供吸引两种工人的唯一合同：混同均衡。

2、 代表性厂商提供仅吸引一种工人的唯一合同：失业均衡。

3、 代表性厂商提供两分合同，每种工段一份：分离均衡。

首先混同均衡与失业均衡都不存在。

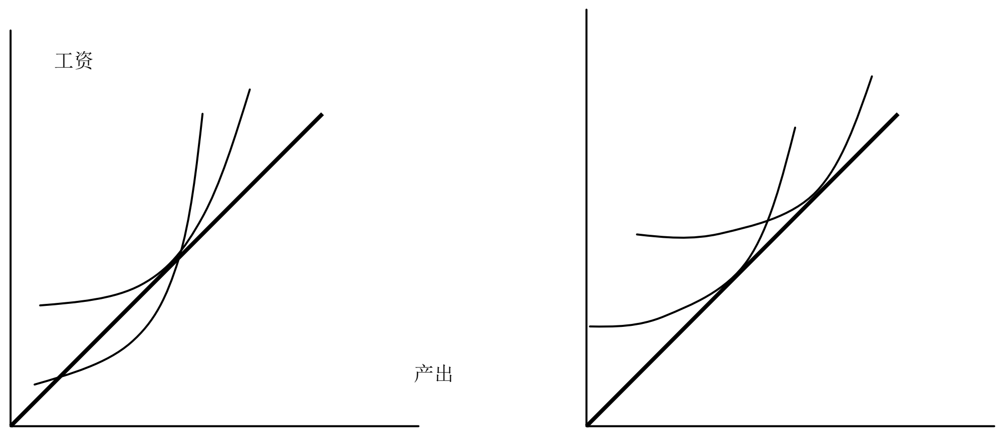



图 A 是混同均衡，但不可能存在，因为出现了改进区，事实上厂商之间竞争使高成本的无差异线上移，直到 B 图，从而实现分离均衡。

例子：隐蔽信息：垄断与竞争

已知 $C_t(x)=tx^2/2,\ \pi1=\pi2=0.5$，分析垄断与竞争下委托代理问题。

在垄断情况下

$$\max\sum\pi_t(x_t-s_t)=\pi_1[x_1-c_1(x_1)-c_2(x_2)+c_1(x_2)]+\pi_2[x_2-c_2(x_2)]$$

$$\begin{cases} c_1'(x_1)=1 \\ c_2'(x_2)=1+\dfrac{\pi_1}{\pi_2}[c_1'(x_2)-c_2'(x_2)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&C_t(x)=tx^2/2,\ \ \pi1=\pi2=0.5\\
&c_1'(x_1^*)=x_1^*=1\\
&c_2'(x_2^*)=1+c_1'(x_2^*)-c_2'(x_2^*)\\
&4x_2^*=1+x_2^*\\
&x_2^*=1/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&s_2^*=c_2(x_2^*)=(x_2^*)^2=1/9\\
&s_1^*=c_1(x_1^*)+c_2(x_2^*)-c_1(x_2^*)=1/2+1/9-1/18=5/9
\end{aligned}$$

分离均衡合同为如果工人产出为 1，则支付报酬 5/9；如果工人产出为 1/3，则支付报酬 1/9。在这一合同下低成本工人会自动选择高产出---高报酬合同，高成本工人会自动选择低产出---低报酬合同。由于这个工人为高和低成本的概率各为 0.5，所以企业期望利润为 0.5（1-5/9）+0.5（1/3-1/9）=1/3。

在竞争情况下分离均衡是完美贝叶斯均衡。零利润条件为

$s_1=x_1$

$s_2=x_2$

每类工人最大化支付

$$\max s_1 - c_1(x_1) = x_1 - x_1^{\ 2} / 2$$
$$\bar{x}_1 = 1$$
$$\max s_2 - c_2(x_2) = x_2 - x_2^{\ 2}$$
$$\bar{x}_2 = 1/2$$

分离均衡合同为每类工人的报酬与产出相等。低成本工人自动选择产出和报酬均为 1，高成本工人自动选择产出和报酬均衡为 1/2。工人的保留效用（s-c）内生

## 第八节　逆向选择：竞争

假定总产值不仅取决于劳动的痛苦程度（成本函数的 x(c)），而且取决于劳动技能 v（可以理解为产品质量，或将数量折算成质量），因此总产值为 y=vx。两类工人的总产值函数为 $y_t=v_t x$。考虑混同均衡与分离均衡。

1、混同均衡不存在

在混同均衡下代表性厂商的预期利润为零

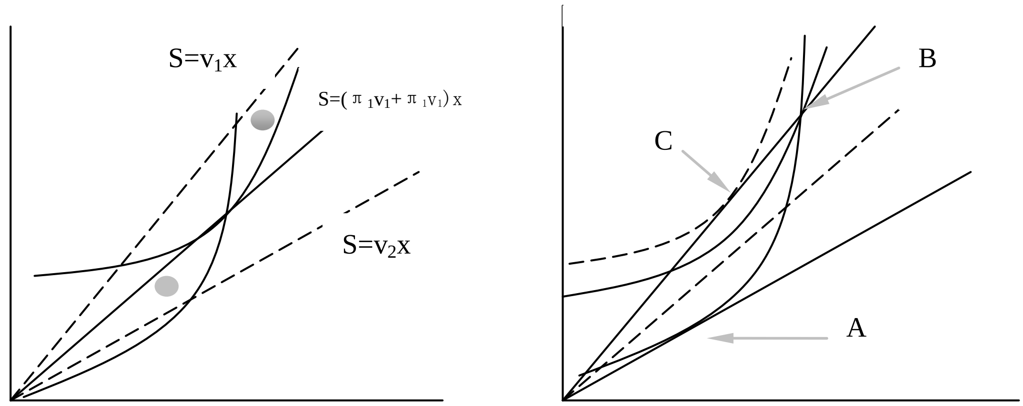
$$E(\tilde{y} - \tilde{s}) = \pi_1(v_1 x_1 - s_1) + \pi_2(v_2 x_2 - s_{21}) = 0$$

在混同均衡下提供统一合同（s*,x*）。

这时企业的预期产值为：$\bar{y} = \pi_1 v_1 x_1 + \pi_2 v_2 x_2 = (\pi_1 v_1 + \pi_2 v_2) x^*$

预期总成本为：$\bar{s} = \pi_1 s_1 + \pi_2 s_2 = s^*$

零利润条件要求前 2 者相等：$s = (\pi_1 v_1 + \pi_2 v_2) x$




混同不是一个均衡，因为某个厂商可以在上灰点区找到合同以吸引高能者，这是一种改进。下灰点区合同可吸引低能者。分离是一个均衡，分离均衡点为 A 和 B 点。C 点是帕累托有效，但不满足自偏好约束，若某厂商在 C 点提供合同以期望仅吸引高能者，但他面临逆向选择，低能者也偏好这一合同。B 点是逆向选择问题的解。

## 第九节　次品商场和逆向选择

假定旧车质量 q 在[0,1]区间均匀分布，对质量为 q 的旧车，需求人才为 $p_d$=1.5q，供给价格为 $p_s$=q。假定市场上存在一个旧车交易价格 p。显然质量低于 p 的旧车都会推向市场，高于 p 的退出市场。现在汽车的质量均匀分布在[0,p]上，平均质量为 0.5p，消费者知道这一事实，因此需求价格为 $p_d$=1.5*0.5p=0.75p。我们已经假定成交价格为 p，但事实在这个价格上无人购买。由于 p 是任意的，所以在任何价格上旧车都卖不出去，不对称信息导致的逆向选择摧毁了旧车市场。

## 第十节　信号发送

- 保修信号
- 教育信号
- 信号发送是有私人信息的一方先行动，信息甄别是拥有私人信息的一方后行动
- 逆向选择产生于隐蔽信息，隐隐蔽信息问题产生在合约之前；道德风险产生于隐蔽行动，隐蔽行动问题产生于合约之后。

## 第十一章　教育信号的发送：竞争

第一阶段，劳动者选择受教育程度，以表明自己的能力信息

第二阶段，厂商据受教育程度支付工资

假定低能力者生产率为 $v_1$，高能力者为 $v_2$。在完全信息下，零利润条件决定为 $s_t=v_t$；在不对称信息与混同均衡下零利润条件为 $s=p_1v_1+p_2v_2$。受教育成本函数为 $C_1=c_1e$，$C_2=c_2e$。假定教育不影响生产率。

由于厂商根据受教育程度判断智和愚，智者将选择受教育水平来传递是智者的信息，但愚者可能装做智者混同，为使分离均衡是子博弈完美，必须满足激励相容约束：

$$s(e_1)-c_1e_1 \ge s(e_2)-c_1e_2$$

$$s(e_2)-c_2e_2 \ge s(e_1)-c_2e_1$$

或者

$$v_1-c_1e_1 \ge v_2-c_1e_2$$

$$v_2-c_2e_2 \ge v_1-c_2e_1$$

必然能够找到一个 e*，使自偏好约束成立。如果工资函数为受教育水平超过 e*就支付 $v_2$，否则支付 $v_1$，那么分离就是一个均衡，这时智者选择 e*，报酬为 $v_2$，愚者选择不受教育，报酬为 $v_1$。

为使不混同，必须使愚者混同的剩余不超过分离的剩余，即，

$$p_1v_1+p_2v_2-c_1e^* \le v_1$$

$$e^* \ge \frac{p_2(v_2-v_1)}{c_1} \qquad (1)$$

要使智者不选择零教育水平，必须有

$$p_1v_1+p_2v_2 \le v_2-c_2e^*$$

$$e^* \le \frac{p_1(v_2-v_1)}{c_2} \qquad (2)$$

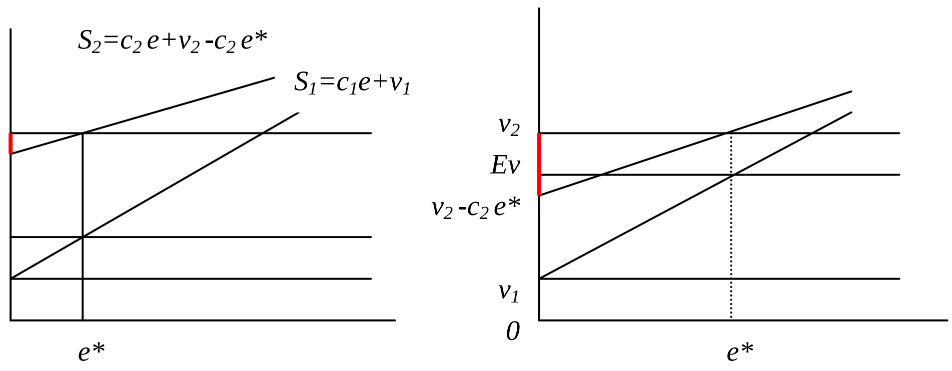
因此分离均衡的条件为

$$\frac{p_1(v_2-v_1)}{c_2} \ge \frac{p_2(v_2-v_1)}{c_1}$$

$$\frac{p_1}{p_2} \ge \frac{c_2}{c_1}$$

似然比大于成本比。这一结论的有趣之处在于社会上低能者比例愈大分离均衡愈可能实现，其原因是低能者比例愈大平均工资愈低，低能者混同的积极性愈低，相反，高能者分离的积极性愈高。这一结论与事实似乎吻合，几乎没有人混同圣人。低能与高能是相对的，相对圣人而言，普通人都是低能者。普通的比例非常大。

书中的 e*是在自偏好约束中令 $e_1^*=0$ 得到的。在这个模型中利用自偏好约束似乎有问题，应该不同于垄断者的歧视价格表和工资表。这是信号传递而不是信号甄别。在信号甄别中工资表已经事先确定，拥有私人信息的一方若混同不存在两种价格或两种工资的加权，但在此处存在加权。




左图为分离均衡，右图为混同均衡。红线段是实现分离的教育成本净损失。

上图中，无差异线斜率为教育边际成本。高能者无差异线的截距为高能者的净福利，它等于生产率与达到分离均衡所要求的最低教育成本之差。分离要求的最低教育年限由低能者的无差异线与平均工资线的交点决定，该线的净福利为不混同时的福利水平 $v_1$。右图之所以是分离均衡是因为高需求者选择分离受教育程度 e*时的福利水平（纵截距）大于受教育程度为零的效用水平 Ev（平均工资），高能者有积极性分离，且这时低能者混同与否无差异，无必要混同。右图之所以是混同均衡是因为高能者选择分离的教育成本太高，以至分离后的福利水平降至混同之下。